Université du Québec à Rimouski

Co-construction, entre enseignants de 2^{e} secondaire et chercheure, d'une grille d'analyse de la complexité des problèmes écrits proposés en algèbre au premier cycle du secondaire

Mémoire présentée

dans le cadre du programme de maîtrise en éducation

en vue de l'obtention du grade de maître ès arts

PAR

© Lysandre Berger

[Novembre 2017]

Composition du jury :

Michel Bélanger, président du jury, Université du Québec à Rimouski

Mélanie Tremblay, directrice de recherche, Université du Québec à Rimouski

Mireille Saboya, codirectrice de recherche, Université du Québec à Montréal

Patricia Marchand, professeure, Université de Sherbrooke

Olivier Michaud, professeur, Université du Québec à Rimouski

Dépôt initial le 30 juin 2017 Dépôt final le 20 novembre 2017

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d’abord mes deux directrices, Mélanie Tremblay et Mireille Saboya, pour leur soutien et leurs encouragements. Vous avez su me témoigner indulgence, patience et confiance. Vos commentaires ont su me faire progresser dans ce travail de longue haleine malgré mes difficultés et mes contraintes personnelles. Je vous remercie infiniment de m’avoir encouragé à persévérer et d’avoir eu la gentillesse et la délicatesse de me laisser une distance aux moments opportuns. Vous avez cru en moi quand je n’y croyais plus. Vos apports dans ma vie professionnelle sont immenses. Je vous admire et vous respecte.

Je remercie les membres du jury, Patricia Marchand, Olivier Michaud et Michel Bélanger, d’avoir généreusement accepté de lire et de commenter mon travail de recherche. Aux deux enseignants qui ont volontairement pris de leur temps pour me permettre de faire ma recherche, je leur suis immensément reconnaissante. Nous avons discuté et ri pendant ces rencontres. Sans vous, cette recherche n’aurait pas de sens, pas d’âme.

Je tiens également à remercier mes parents, Marielle et Michaël, qui m’ont soutenu dans cette péripétie, malgré les embûches de ma vie personnelle. Je vous remercie de votre compréhension et de votre soutien dans les moments de découragement. Merci à mes amis, FX, Louis-Julien, Jeanne, Anne-Marie, Pico, Marianne, mes collègues et les autres de m’avoir changé les idées dans mes périodes d’insécurité. Merci Benoit d’avoir eu l’audace de rire de mes difficultés, de dédramatiser mes angoisses et d’avoir su bien viser mon cœur. Les longues heures à travailler seule dans mon bureau pendant que mes enfants, Ulrich, Uriel et Ulysse, jouaient et riaient étaient parfois pénibles à accepter. Merci à tous d’avoir gracieusement gardé mes enfants afin que je relève le défi que je m’étais fixé. Mon devoir d’école qui a duré quelques années prend maintenant fin mes chéris.

RÉSUMÉ

La résolution de problèmes est promue depuis plusieurs décennies dans différents pays. Au fil du temps, différents critères ont été pris en considération pour juger de la complexité de l'énoncé d'un problème : la structure relationnelle, le contexte, le type de données fournies dans l'énoncé, les registres de représentation, le type de réponse, l'activité cognitive appréhendée chez l'élève, les concepts présents dans les différents champs mathématiques, le nombre, la nature et l'enchaînement des tâches qui constituent le problème. À notre connaissance, peu de recherches se sont intéressées à la voix des enseignants dans l'identification et l'explicitation de leurs critères de complexité. Nous nous intéressons plus particulièrement aux critères de complexité qui teintent les problèmes écrits en algèbre qui rejoignent les préoccupations des enseignants. Une recherche collaborative a été menée avec deux enseignants intervenant à la deuxième année du secondaire pour co-construire une grille d'analyse présentant les critères de complexité des problèmes écrits en algèbre à la jonction entre la réalité des enseignants et la recherche. Après une entrevue individuelle et deux rencontres de groupe, les enseignants ont évoqué des critères de complexité qu'ils jugeaient pertinents à partir de divers problèmes. Ces critères se sont raffinés et bonifiés par des discussions et des négociations entre les participants. Cette grille comporte quatre catégories nommées par les participants comme suit, *Organisation physique du texte, Ressources de l'élève*, *Mathématisation*, et *Type de problème*. La grille d'analyse co-construite est présentée en faisant le parallèle avec ce qui existe dans les recherches et dans le programme de formation de l'école québécoise (MELS, 2006). Finalement, la grille d'analyse est opérationnalisée avec de nouveaux problèmes écrits en algèbre.

Mots clés : critères de complexité, problème, algèbre, recherche collaborative

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

LISTE DES ABRÉVIATIONS, DES SIGLESET DES ACRONYMES

C1	Compétence 1 : Résoudre une situation-problème
C2	Compétence 2 : Déployer un raisonnement mathématique
MEESR	Ministère de l'Éducation, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche
MELS	Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport
MEQ	Ministère de l'Éducation du Québec
NAEP	National Assessment of Education Progress
PEI	Programme d'éducation international
PFEQ	Programme de formation de l'école québécoise
RG1	Première rencontre de groupe
RG2	Deuxième rencontre de groupe
RIE	Rencontre individuelle d'Éric
RIF	Rencontre individuelle de Félix
UQAM	Université du Québec à Montréal
UQAR	Université du Québec à Rimouski

INTRODUCTION

Au Québec et ailleurs dans le monde, les programmes de formation en mathématique mettent l'accent sur l'importance de la résolution de problèmes. Plus précisément, en 2^{e} année du secondaire, la résolution de problèmes prend une place importante en algèbre dans le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ) (MELS, 2006), programme qui est teinté par le concept de complexité (Lajoie et Bednarz, 2014, 2016). Plusieurs chercheurs se sont penchés sur la résolution de problèmes. Certains d'entre eux se sont intéressés à analyser les raisonnements mobilisés par les élèves lors de la résolution de problèmes jugés plus ou moins complexes (Marchand et Bednarz, 2000; Oliveira et Camara, 2011; Oliveira et Rhéaume, 2014; Saboya *et al.*, 2013; Adihou *et al.*, 2015). D'autres ont construit des questionnaires qui ont distribué à des élèves pour confirmer une complexité appréhendée dans l'analyse des problèmes (Grugeon, 1995; Marchand et Bednarz, 1999; Saboya *et al.*, 2013) et quelques chercheurs ont développé des outils pour analyser la complexité des problèmes en algèbre dans les manuels scolaires (Bednarz et Janvier, 1994; Cotnoir, 2010; Antoun, 2012).

Cette étude s'inscrit dans la même visée que ces dernières recherches et s'intéresse à la complexité des problèmes écrits en algèbre, mais sous un angle nouveau, celui des enseignants. En effet, à notre connaissance, il n'y a pas de recherches identifiant les critères de complexité que les enseignants reconnaissent pour juger de la complexité d'un problème écrit en algèbre. Cette étude cherche à donner une voix aux enseignants à travers une recherche collaborative qui vise la co-construction entre enseignants et chercheure d'une grille d'analyse à la jonction entre les critères provenant des recherches et ceux des enseignants.

Deux enseignants volontaires ont participé à cette recherche à travers la mise en place d'une activité réflexive. Notons que la chercheure est également conseillère pédagogique, son rôle est d'accompagner la formation continue des enseignants de mathématique au secondaire. Ainsi, la recherche collaborative est un prolongement conséquent dans le cadre de ses activités professionnelles. De cette façon, la recherche collaborative permet de jumeler l'expérience professionnelle des enseignants, les discussions autour de la complexité des problèmes et la formation continue des participants.

La présente recherche est divisée en cinq chapitres. Le premier chapitre expose la problématique dans laquelle est explicité le questionnement de départ de cette recherche qui provient d'observations de la chercheure auprès d'enseignants intervenant au premier cycle du secondaire en algèbre. Sont rapportées l'importance de la résolution de problèmes au Québec et à l'international ainsi que la double finalité de la résolution de problèmes. Une revue des recherches menées en algèbre permet de situer cette étude parmi celles qui se sont penchées sur la complexité des énoncés de problèmes écrits en algèbre.

Dans le deuxième chapitre de ce travail, les critères rapportés par les recherches pour caractériser la complexité des énoncés de problèmes ainsi que ceux du PFEQ (MELS, 2006) sont décrits, soient la structure relationnelle, le contexte, le type de données fournies dans l'énoncé, les registres de représentation, le type de réponse, l'activité cognitive, les concepts présents dans différents champs mathématiques, le nombre, la nature et l'enchaînement des tâches. Cet apport permet de situer et de faire un lien entre les critères énoncés par les enseignants et ceux présentés par les recherches.

Comme précisée précédemment, cette étude se situe dans la méthodologie de la recherche collaborative. Ce type de méthodologie est décrit dans le troisième chapitre ainsi que les outils de collecte de données qui ont permis d'opérationnaliser cette recherche, des entrevues individuelles avec chacun des enseignants et deux rencontres de groupe.

Dans le quatrième chapitre est conduite l'analyse des entrevues individuelles et des rencontres de groupe. Les critères de complexité qui ont émergé lors de l'analyse réflexive ont permis d'élaborer une grille d'analyse co-construite entre chercheure et enseignants. Des liens avec les critères énoncés par les recherches et le PFEQ (MELS, 2006) sont tissés. De plus, cette grille est opérationnalisée moyennant l'analyse de deux problèmes.

Finalement, la négociation et la co-construction de certains critères de complexité sont analysées à travers un épisode important.

Cette analyse permet dans le cinquième chapitre de discuter de quatre aspects. Le premier aspect porte sur les critères de complexité dégagés dans le quatrième chapitre. Le second concerne les différents rôles adoptés par la chercheure et aussi conseillère pédagogique lors des rencontres de groupe. Troisièmement, une discussion est également menée autour du développement professionnel des trois participants comme une des retombées de cette recherche collaborative. Finalement, des pistes sont proposées sur la démarche de résolution de problèmes, thème qui se dégage des discussions entre les trois participants.

CHAPITRE 1
PROBLÉMATIQUE

Dans ce premier chapitre est circonscrite la problématique de cette recherche qui s'intéresse aux critères permettant de se prononcer sur la complexité des énoncés de problèmes écrits en algèbre, critères qui émergent à la croisée de la pratique enseignante et de la recherche. Dans une première section est exposée l'origine du questionnement de cette recherche qui repose sur l'expérience professionnelle de la chercheure. Par la suite, est décrit l'apport considérable de la résolution de problèmes dans l'enseignement/apprentissage des mathématiques dans les programmes scolaires, notamment au Québec, ainsi que l'importance de la résolution de problèmes en algèbre au premier cycle du secondaire, contenu ciblé dans ce travail. Finalement, la dernière section fait état des travaux qui se sont déjà intéressés à l'analyse des problèmes proposés dans l'introduction de l'algèbre et plus particulièrement des problèmes dont la résolution vise l'expression d'un raisonnement analytique. La problématique ainsi définie mène à la formulation des objectifs et des questions de recherche qui guident cette étude.

1.1 ORIGINE DU QUESTIONNEMENT DE RECHERCHE

Le questionnement de cette recherche provient de l'expérience de la chercheure en tant que conseillère pédagogique en mathématique au secondaire depuis six années. Dans le cadre de ses fonctions professionnelles, elle a collaboré avec plusieurs enseignants sur différents projets, notamment dans l'analyse et l'élaboration de problèmes écrits en algèbre. De plus, elle participe au projet de formation continue subventionné par le Chantier 7 (2014-2018), projet s'intéressant au développement de la pensée algébrique au premier cycle du secondaire, en compagnie d'enseignants et de conseillers pédagogiques de la grande région de Québec. Ce projet est dirigé par Mélanie Tremblay (UQAR) et Mireille

Saboya (UQAM). Certains de ces objectifs font particulièrement écho aux intentions de la présente recherche, soient développer, chez les enseignants, leurs compétences dans leur travail de planification des situations d'apprentissage, notamment par l'analyse des ressources didactiques mises à leur disposition, et les accompagner afin qu'ils puissent orchestrer des situations d'apprentissage favorisant davantage la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. Parmi les constats exprimés par les enseignants y participant, on retient que depuis l'implantation du PFEQ (MELS, 2006), les élèves semblent éprouver plus de difficultés en résolution de problèmes. Ils expliquent cela par l'accroissement de la complexité et de la variété des problèmes proposés, diversité et complexité que prône le PFEQ (MELS, 2006). Les participants du projet soulignent spécifiquement les difficultés des élèves dans la résolution de problèmes en algèbre. Ils ressentent ainsi le besoin d'avoir un outil permettant d'analyser les problèmes écrits concernant la complexité.

Ainsi, lors de discussions entre conseillère pédagogique et enseignants sur les possibles critères qui teintent la complexité d'un problème en algèbre, les enseignants évoquent déjà, par leur expérience, différents critères comme la longueur du texte, la présence de certains mots « difficiles » pour les élèves et les concepts mathématiques en jeu. Par exemple, la présence des mots comme « trois de plus » et l'utilisation de fractions dans un problème sont des éléments difficiles pour les élèves. Un autre critère qui guide les enseignants dans l'analyse de la complexité d'un problème est le nombre d'étapes, souvent associées à différents calculs pour ainsi mener à sa résolution. De cette façon, plus il y a d'étapes pour trouver une donnée manquante, plus le problème est jugé complexe. Ainsi, lorsqu'il s'agit d'analyser des problèmes, les enseignants sont aptes à se prononcer sur leur complexité en s'appuyant sur ces critères. Toutefois, devant deux problèmes (voir tableau 1) dont l'étude de la structure relationnelle[1] conduit à une différentiation du point de vue de la recherche, les critères présentés précédemment ne permettent pas aux enseignants de discriminer lequel des deux problèmes est le plus complexe.

[1] L'étude de la structure relationnelle d'un énoncé de problème est discutée plus en détail au chapitre II. L'enchaînement des relations de comparaison est un des critères de complexité qui peut influencer ces deux problèmes.

Tableau 1 : Deux problèmes ayant une structure relationnelle différente

Problème 1 : Ansène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 15 000 $ de plus à Marie qu'à Chantal et il donne 5000 $ de plus à Sophie qu'à Chantal. Si sa fortune s'élève à 158 000 $, combien recevront chacune des trois nièces ?	Problème 2 : Ansène Ponton lègue sa fortune à ses trois nièces, Marie, Chantal et Sophie. Il donne 3 fois plus d'argent à Marie qu'à Chantal et il donne 16 000 $ de plus à Marie qu'à Sophie. Si sa fortune s'élève à 208 000 $ combien recevront chacune des trois nièces ?

Source : Problèmes proposés au projet du Chantier 7 (2014-2018)

Ces deux problèmes présentent des similarités : un contexte d'héritage, trois grandeurs en jeu inconnues (le montant d'argent de Marie, celui de Sophie et celui de Chantal) et un total donné. La distinction entre ces deux problèmes provient de l'enchaînement des deux relations de comparaison. L'étude de Bednarz et Janvier (1994) permet de se prononcer sur la complexité de ces deux problèmes, le premier (type source) étant moins complexe que le deuxième (type puits).

Ainsi, la présente recherche s'intéresse plus particulièrement aux problèmes écrits proposés lors de l'introduction de l'algèbre au premier cycle du secondaire (élèves de 12-14 ans). Or, dans la perspective où l'approche par résolution de problèmes est au cœur de l'activité mathématique espérée dans la classe, le questionnement initial tourne autour des critères de complexité qui peuvent guider l'enseignant dans son travail d'analyse préalable des énoncés des problèmes dont une résolution algébrique est attendue. L'expérience de conseillère pédagogique de la chercheure l'amène à souhaiter un travail de construction conjugué avec des enseignants d'une grille d'analyse des problèmes écrits en algèbre. Cette grille pourrait faciliter le travail de planification des enseignants autour d'un choix éclairé de problèmes en matière de complexité en algèbre.

1.2 IMPORTANCE DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Depuis les années 1980, l'importance accordée à la résolution de problèmes ne fait que s'accentuer dans plusieurs programmes scolaires à travers le monde (Radford, 1996; Schoenfeld, 2007; Richard, Houdement et Demonty, 2012; Fagnant, Marcoux et Vlassis, 2014; Freiman et Savard, 2014). Cela se traduit d'ailleurs par une prolifération d'expressions permettant de distinguer les différents problèmes proposés aux élèves selon différents enjeux (problème pour apprendre, problème pour inviter à l'investigation, problème visant la mobilisation de plusieurs concepts différents). Tous ces problèmes ont comme point commun de s'appuyer sur des énoncés dont le contexte, issu du réel, dépasse le simple habillage. La résolution de ces problèmes exige de l'élève une mobilisation de ses ressources. Dans le cadre de cette recherche, tous ces termes sont regroupés sous le même nom, *énoncé d'un problème* ; l'objectif n'étant pas de les distinguer.

Peu importe l'appellation des problèmes, une double acception s'exprime dans les différents programmes scolaires. On peut considérer la résolution d'un problème i) en tant que finalité où l'on espère alors qu'à la suite de certains apprentissages l'élève sera en mesure de résoudre des problèmes proposés de façon autonome (Charnay, 1992; Fagnant, Marcoux et Vlassis, 2014). On peut aussi appréhender la résolution d'un problème ii) en tant qu'approche pédagogique à promouvoir pour introduire de nouveaux savoirs : « La résolution de problèmes n'est pas seulement un objectif de l'apprentissage des mathématiques, c'est aussi l'un des principaux moyens d'apprendre les mathématiques » (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p.52). Ainsi, lorsqu'un enseignant opte pour l'approche par résolution de problèmes pour faire apprendre (seconde finalité), il doit nécessairement analyser des problèmes qui proposent des « défis raisonnables » à l'élève de manière à le faire cheminer vers la résolution de problèmes (la première finalité).

1.2.1 IMPORTANCE DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES AU QUÉBEC

Au Québec, l'importance d'apprendre aux élèves à résoudre des problèmes est au cœur du plus récent programme du niveau primaire (MELS, 2001) et du niveau secondaire (MELS, 2006). Cet objet d'apprentissage se traduit notamment dans les compétences disciplinaires qui sont : *Résoudre une situation-problème* (compétence 1), *Déployer un raisonnement mathématique* (compétence 2) et *Communiquer à l'aide du langage mathématique* (compétence 3). On le retrouve également comme compétence transversale, soit *Résoudre des problèmes*.

Cette place importante que prend la résolution de problèmes dans les programmes scolaires québécois est présente depuis plus de trois décennies (Lajoie et Bednarz, 2012). Intéressées par l'évolution de la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques au Québec, Lajoie et Bednarz (2012) ont porté une attention particulière aux différents programmes de formation et autres travaux scientifiques réalisés au Québec sur ce sujet. Les chercheures remarquent que les problèmes avant les années 1960 servaient à des fins d'application de connaissances et de développement du raisonnement. À partir des années 80, les problèmes sont aussi considérés comme une source de construction de connaissances nouvelles et de réinvestissement des connaissances acquises (Lajoie et Bednarz, 2012). À cette époque aussi, les liens devaient exister entre les mathématiques et la réalité. De plus, la variété des problèmes à proposer aux élèves est discutée et s'appuie sur divers critères : contexte, adéquation des données, nombre de solutions, modes de représentation (MEQ, 1988). Plus récemment, le PFEQ (MELS, 2006) renforce l'importance accordée à la résolution de problèmes et l'accent est mis autant sur les connaissances que sur les processus (Lajoie et Bednarz, 2015). Lajoie et Bednarz (2015) ont analysé des documents institutionnels pour établir les différentes fonctions de la résolution de problèmes que l'on retrouve exposées dans le tableau 2.

Tableau 2 : Évolution de 1900 à nos jours des rôles associés aux problèmes

	1904-1945 (avant la Seconde Guerre mondiale)	**1946-1959 (après la Seconde Guerre mondiale)**	**1960-1970 (après la Révolution tranquille)**	**1980-1990**	**2000… (période actuelle)**
Fonction d'application	Une fonction d'application fortement liée au monde de la pratique / une intention de mise en pratique des connaissances	Idem	Une intention d'utilisation des connaissances et des techniques apprises	Une intention de réinvestissement des connaissances	Une intention de réinvestissement des concepts et des processus mathématiques
Fonction de formation	Une occasion de raisonner les notions	Idem	Une occasion de développer la pensée mathématique	Une occasion de développer des habiletés générales (estimer, généraliser, abstraire, etc.)	Une occasion de développer des habiletés intellectuelles faisant appel au raisonnement et à l'intuition créatrice
Fonction de construction de connaissances			Un problème comme amorce à l'apprentissage de concepts, de propriétés	Un problème à la source de la construction de connaissances nouvelles	Une SP qui permet d'explorer, d'inventer, de construire des concepts et des processus mathématiques
La résolution de problèmes comme objet d'apprentissage				La résolution comme objet d'étude et habileté de base à développer (s'accompagne d'un regard méta sur cette résolution)	Le processus de résolution de SP comme objet d'apprentissage (s'accompagne d'un regard méta sur ce processus)
La résolution de problèmes comme modalité pédagogique				La résolution de problèmes vue comme une approche pédagogique, un moyen à privilégier dans l'enseignement des maths	La résolution de SP, en tant que modalité pédagogique, supporte la grande majorité des démarches d'apprentissage en maths
Une fonction plus générale			Situation servant d'amorce à l'apprentissage		La résolution de SP pour développer les autres compétences

Source : Lajoie et Bednarz (2015)

De ce tableau, il est possible de remarquer que les fonctions associées au problème avant et après la Seconde Guerre mondiale sont de l'ordre de l'application. Tandis que les problèmes promus dans nos programmes des années 80 jusqu'à la période actuelle ont des fonctions beaucoup plus variées (application, formation, construction de connaissances, objet d'apprentissage, modalité pédagogique). La distinction entre les problèmes des années 80 et ceux des années 2000 relève donc de leur degré de complexité. Aussi, dans les années 2000, les problèmes qui font leur apparition par le biais du PFEQ (MELS, 2006) sont désormais nommés « situations-problèmes » (Lajoie et Bednarz, 2012). Différents critères sont d'ailleurs retenus par le PFEQ (MELS, 2006) pour préciser les problèmes que l'on espère que les élèves côtoieront durant leur parcours scolaire. Ainsi, pour être qualifié de situation-problème, un problème doit répondre à l'une des conditions suivantes : « la situation n'a pas été présentée antérieurement en cours d'apprentissage; l'obtention d'une solution satisfaisante exige le recours à une combinaison non apprise de règles ou de principes dont l'élève a ou non fait l'apprentissage; le produit, ou sa forme attendue, n'a pas été présenté antérieurement » (MELS, 2006, p.240).

Considérant la variété des problèmes que l'enseignant peut proposer à ces élèves, son travail d'analyse des énoncés est primordial dans la planification de son enseignement. L'intérêt tout particulier de ce mémoire pour l'analyse des énoncés de problèmes visant l'introduction de l'algèbre nous conduit à dresser un portrait des travaux de recherche qui ont étudiés différents critères permettant de rendre compte de cette complexité relative.

.

1.3 ANALYSE D'UN ÉNONCÉ DE PROBLÈME VISANT L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE

Des chercheurs (Bednarz, Janvier et Lee, 1996; Squalli, 2000; Kieran, 2007; Artigue, 2012) ont proposé d'introduire l'algèbre au premier cycle du secondaire par différentes approches : approche par le langage, approche par la généralisation (patrons numériques ou géométriques), approche par modélisation, approche fonctionnelle et approche par la résolution de problèmes écrits. Selon Squalli (2000), l'approche par le langage accorde une grande place au symbolisme. La manière de rédiger des expressions avec le langage littéral, l'apprentissage des expressions associées (exemples : coefficient, termes semblables, constante) ainsi que le travail de manipulations d'expressions algébriques selon certaines règles constituent cette approche. L'approche par généralisation s'appuie sur un raisonnement inductif qui consiste à étudier plusieurs cas particuliers (souvent des patrons) pour y dégager une régularité. Prétexte pour introduire le symbolisme, cette approche vise l'expression d'une généralisation algébrique à l'aide d'une règle que l'élève reconnaît pertinente pour déduire le terme à partir d'un rang donné ou inversement. L'approche par modélisation propose de représenter la vie quotidienne par des modèles mathématiques (Squalli, 2000). Selon Squalli (2000), la principale caractéristique de l'approche fonctionnelle est l'idée de « variation », soit le lien d'interdépendance qui unit deux variables. L'approche par résolution de problèmes a été traitée précédemment dans ce chapitre et est celle retenue dans ce mémoire. On rappelle simplement ici qu'il s'agit de proposer des problèmes où différentes grandeurs inconnues sont en jeu et qui conduit aussi à l'introduction au symbolisme. Il est alors espéré que les élèves acceptent de raisonner analytiquement[2] et qu'ils recourent au symbolisme pour modéliser le problème, à l'aide d'une équation, en vue de sa résolution. Un travail sur le sens de la lettre inconnue est ici privilégié. Ainsi, alors que la compréhension de l'algèbre est jugée ardue par les élèves, voire même une source d'échecs pour plusieurs (Marchand et Bednarz, 1999), l'approche par résolution de problèmes en algèbre demeure une clé prise par plusieurs enseignants pour favoriser de meilleurs apprentissages.

Depuis déjà plus de trois décennies, différents travaux ont cherché à mieux comprendre la complexité de l'énoncé d'un problème en algèbre. À titre d'exemple, quatre modèles d'analyse permettant de juger de la complexité de l'énoncé d'un problème écrit en algèbre sont présentés dans les sous-sections qui suivent : un de ces modèles repose sur la structure relationnelle, un autre s'appuie sur le concept de tâches, un troisième explicite la structure multidimensionnelle et finalement un dernier porte sur les contextes.

[2] Le raisonnement analytique est défini plus précisément dans le chapitre II.

1.3.1 ANALYSE DE LA STRUCTURE RELATIONNELLE D'UN PROBLÈME EN ALGÈBRE

Bednarz et Janvier (1994) ont établi une classification des problèmes en algèbre à partir de leur énoncé. Ces chercheures ont utilisé une schématisation pour analyser les problèmes qui s'appuie sur les travaux de Vergnaud (1982). Elles ont dégagé trois classes de problèmes : des problèmes impliquant des relations de comparaison, des problèmes avec des taux et des problèmes qui mettent en jeu des transformations dans le temps. Bednarz et Janvier (1994) ont analysé les manuels scolaires des années 80, Marchand et Bednarz (1999, 2000) ont mené une étude comparable avec les manuels des années 90 et Tremblay et Saboya (sous presse) ont poursuivi l'étude pour les manuels des années 2000. Constatant l'accroissement de problèmes menant à la forme ax+b = cx+d, Tremblay et Saboya (sous presse) ont plus particulièrement étudié ces problèmes qu'elles nomment « problèmes de mise en égalité ». Tout comme leurs prédécesseurs, elles ont analysé les problèmes proposés aux élèves dans les manuels afin de juger de la variété offerte selon, entre autres, les classes de problèmes. Ainsi, ces études ont démontré que les manuels des années 80 et 90 proposent majoritairement des problèmes impliquant des relations de comparaison tandis que les manuels des années 2000 offrent une plus grande diversité d'énoncés de problèmes en y combinant plusieurs classes. Ce changement fait écho aux attentes du PFEQ (MELS, 2006) qui prône la variété des problèmes proposés ce qui entraîne un accroissement de la complexité des problèmes. Ainsi, l'étude de la structure relationnelle de l'énoncé a permis de classifier les problèmes et d'en déterminer la complexité. Les problèmes impliquant des taux ont été étudiés par Guzman, Bednarz et Hitt (2003).

1.3.2 ANALYSE DES ÉNONCÉS À PARTIR DU CONCEPT DE TÂCHE

Une grille d'analyse a été élaborée par Jonnaert, Lauwaers et Peltier (1990) afin d'étudier les différents types de problèmes en mathématique. Cette grille s'appuie sur le concept de *tâche* qu'ils définissent comme suit : « une tâche est définie comme requérant simplement l'utilisation de ce qui est connu et l'utilisation de ressources accessibles, alors qu'un problème est une tâche qui ne s'accomplit pas automatiquement » (Antoun, 2012, p.39). Cette grille a été reprise et bonifiée par Antoun (2012) qui analyse dans les manuels scolaires du premier cycle au Québec, la complexité des situations présentes dans les chapitres se rapportant à la résolution de problèmes en algèbre. Cette grille repose sur trois paramètres : les objets, les opérateurs et les produits. Les objets sont les matériaux nécessaires pour exercer une activité et ils peuvent être donnés ou non dans le problème. Les données implicites et celles fournies sont les informations nécessaires pour résoudre le problème. Les opérateurs sont les outils pour opérer avec les objets. Ils peuvent être des algorithmes, des formules ou des règles et ils sont donnés ou non dans la situation. Ils font référence aux concepts et processus que l'élève doit mobiliser pour résoudre le problème. Le produit est le résultat de l'opérationnalisation des outils à partir des objets, c'est-à-dire le résultat attendu et le nombre de réponses possibles. Ces paramètres sont analysés selon la présence ou non d'informations, et ce, pour chacune des tâches qui constitue le problème. Jonnaert, Lauwaers et Peltier (1990) distinguent trois types d'incertitude liés aux paramètres selon la quantité d'informations fournies dans le problème :

> i+ : L'indice est fort sur le paramètre, c'est-à-dire que l'information est donnée dans le problème, donc l'élève n'a pas à la traiter mathématiquement. L'incertitude qui en découle est faible.
>
> i- : L'indice est faible sur le paramètre, c'est-à-dire que l'information doit passer par le traitement mathématique pour l'obtenir. L'incertitude sera donc forte.
>
> i^{o} : L'indice est nul, c'est-à-dire que l'information doit être trouvée ailleurs que dans la situation. L'incertitude est maximale.

La présence ou non d'informations liée aux paramètres influe sur le degré d'incertitude et le degré d'ouverture de la tâche. En effet, si le problème ne présente pas de difficultés, car toutes les informations y sont données et qu'il s'agit simplement d'un traitement, le problème est considéré comme fermé, car le niveau d'information est élevé et le degré d'incertitude ainsi que le degré d'ouverture sont nuls. À l'inverse, si le problème comporte plusieurs difficultés sur différents paramètres, il est considéré comme ouvert.

Antoun (2012) a analysé les situations identifiées par les auteurs de manuels comme des situations-problèmes dans le chapitre portant sur la résolution de problèmes en algèbre. Ainsi, dans le problème *Les bancs*, elle l'a analysé en relevant les indices donnés sur chacun des paramètres (objet, opérateur, produit) et prend en considération le degré d'information (voir tableau 3).

Les bancs : Un groupe d'élèves entre dans une salle. Si les élèves s'assoient 3 par banc, 10 personnes n'auront pas de place; à 5 par banc, il y aura 6 places libres. Combien d'élèves y a-t-il ? (*Perspective,* Guay, Hamel et Lemay, 2005, p.312)

Tableau 3 : Structure du problème *Les bancs*

Question	**Objet**	**Opérateur**	**Produit**
Combien d'élèves y-a-t-il ?	- 3 personnes par banc (i+) - 10 personnes qui n'ont pas de place (i+) - 5 personnes par banc (i+) - 6 places libres (i+)	Mise en équation (i-)	Nombre d'élèves (i-)

Source : mémoire de Antoun (2012, page150)

Les informations sur l'objet sont présentes, donc directement écrites dans l'énoncé du problème tandis que celles pour l'opérateur et le produit sont manquantes. Pour l'opérateur, l'élève doit construire lui-même l'équation pour mettre en relation ces données fournies, c'est-à-dire en mobilisant les concepts et processus en algèbre. L'élève doit organiser une démarche et traiter les informations pour résoudre ce problème afin de calculer la valeur du résultat final, soit le produit. Antoun (2012) conclut que cette situation est une situation-problème potentielle.

1.3.3 ANALYSE QUI S'APPUIE SUR LA DIMENSION MULTIDIMENSIONNELLE EN ALGÈBRE

Grugeon (1995) a établi une structure d'analyse multidimensionnelle de la compétence algébrique autant du côté de l'élève que de l'enseignant. Pour circonscrire la compétence algébrique, elle se base sur la synthèse de travaux menés en didactique de l'algèbre : la rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre, l'introduction de nouveaux objets en algèbre et la délimitation du champ des problèmes algébriques. Ainsi, une grille d'analyse des énoncés de problèmes portant sur les différentes activités algébriques est proposée. Cette grille d'analyse est organisée en six composantes et leurs critères associés (voir tableau 4) : traitement algébrique, rapport arithmétique/algèbre, gestion dans le registre des écritures algébriques, articulation entre registre des écritures algébriques et les autres registres, fonction de l'algèbre et rationalité algébrique. Le traitement algébrique permet d'identifier le type de tâche dans le problème (technique, reconnaissance, mathématisation). Les cinq autres composantes servent à caractériser le problème algébrique. Le rapport arithmétique/algèbre regroupe la démarche de résolution (arithmétique ou algébrique), le statut du signe d'égalité (annonce d'un résultat ou équivalence), le statut des lettres (lettre objet, lettre évaluée, inconnue, nombre généralisé, variable) et l'objet et statut des objets (objet : expression algébrique, formule, équation, fonction et statut : opérationnel, structural, pseudo-structural).

Tableau 4 : Composantes et critères de la compétence en algèbre

Composante	Critère
Traitement algébrique	Reproduction de tâches d'ordre numérique Reproduction de tâches algébriques niveau 1 (simple) Reproduction de tâches algébriques niveau 2 (complexe) Interprétation d'une expression algébrique Traduction/branchement sur la formule Traduction/production guidée (modélisation) Traduction/production (généralisation) Utilisation de l'algèbre pour prouver
Rapport arithmétique/algèbre	Démarche de résolution
	Statut du signe d'égalité
	Statut des lettres
	Objets algébriques et leur statut
Gestion dans le registre des écritures algébriques	Type de formation Type de traitement
Articulation entre registre d'écritures algébriques et les autres registres	Type de conversion
Fonction de l'algèbre	Emploi de l'algèbre
Rationalité algébrique	Type de preuve Type de justification

Cette structure d'analyse multidimensionnelle a permis de mieux comprendre les disparités existantes entre les différents niveaux scolaires en France concernant l'apprentissage de l'algèbre ainsi que de définir les profils d'élèves en algèbre élémentaire. Le modèle de Grugeon a permis de construire un outil de diagnostic informatisé, Pépite, pour déterminer le profil cognitif d'un élève en algèbre à la fin de sa scolarité obligatoire. Les variables didactiques constituant le test sont le type de tâche/type de technique, la nature et la complexité des expressions en jeu, les cadres et registres de représentation et la ou les technique(s) attendue(s). Le tableau 5 montre l'analyse d'un problème en lien avec ces variables tel que présenté par Chenevotot-Quentin, Grugeon-Allys et Delozanne (2011).

Prestidigitateur : Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur : « Tu penses un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7 ». L'affirmation est-elle vraie ? Justifie ta réponse.

Tableau 5 : Analyse du problème *Prestidigitateur* selon les variables en jeu

Variables	Explications
Type de tâches/type de technique	Tâche : Prouver qu'une propriété numérique est vraie Techniques : traduction algébrique, preuve algébrique, lettre comme nombre généralisé, écriture de chaque étape de calcul, égalité comme relation d'équivalence
Nature et complexité des expressions en jeu	Une variable, six niveaux de parenthèses, trois additions, deux soustractions, une multiplication et une division
Cadres et registres de représentation	Programmes de calcul, expressions algébriques, langage naturel vers les écritures algébriques
Niveau de mise en fonctionnement	Ouverture de la question

Ainsi, cette d'analyse de Grugeon porte une attention sur les composantes d'un problème en algèbre du point de vue de l'élève et du cadre institutionnel.

1.3.4 ANALYSE DU CONTEXTE D'UN PROBLÈME EN ALGÈBRE

Cotnoir (2010) a analysé les contextes dans les énoncés de problèmes en algèbre proposés dans les manuels scolaires québécois avant l'implantation du PFEQ (MELS, 2006) afin de les classifier. Dans sa grille d'analyse, elle qualifie d'abord le type de contexte tel que classifié par le MEQ (1988) : réel, imaginaire ou fantastique et purement mathématique[3]. Lorsque le contexte est de type réel, elle investigue davantage en analysant le type de réalité correspondant (activité humaine ou domaine naturel); la tâche rattachée à l'activité proposée (artificielle, authentique fictive ou authentique réelle); la pertinence du contexte pour le raisonnement (pertinent, non pertinent ou essentiel).

Le contexte réel est lié au quotidien (par exemple : calculer le trajet de la maison à l'école) ou à des objets réels (par exemple : déterminer le nombre de pommes dans un panier) tandis que le contexte imaginaire réfère au fruit de l'imagination sans lien avec la réalité (par exemple : calculer le temps d'une journée de 13 h sur une nouvelle planète). Le contexte purement mathématique contient des expressions mathématiques, des formes

[3] La classification des contextes est détaillée dans le chapitre II.

géométriques, des graphiques sans référence à un contexte de vie. Dans le contexte réel, le type de réalité peut être l'activité humaine (par exemple : le sport, un enjeu de société, un emploi, de l'argent) ou au domaine naturel (la faune ou la flore). Lorsque la tâche est conforme au type de réalité (humaine ou naturelle), la tâche est qualifiée d'authentique fictive ou d'authentique réelle si l'élève se met en action pour effectuer cette tâche (par exemple : faire une expérience pour collecter des données) sinon la tâche est artificielle. Lorsque l'élève doit tenir compte du contexte dans son raisonnement, le contexte est donc qualifié d'essentiel (par exemple : interpréter un graphique selon la situation). Par contre, si le contexte n'est pas utile dans le raisonnement de l'élève, le contexte est non pertinent (par exemple : résoudre une expression algébrique lors d'un concours). Lorsque le contexte sert au raisonnement de l'élève, mais qu'il est applicable dans plusieurs problèmes du même type, le contexte est qualifié de pertinent (par exemple : calculer le coût unitaire d'un colis en tenant compte des informations du contexte). La figure 1 montre un problème de colis du manuel *Carrousel* (Breton et Fortin, 1994, volume 1, p.28, numéro 11) qui a été analysé par Cotnoir (2010) (voir tableau 6).

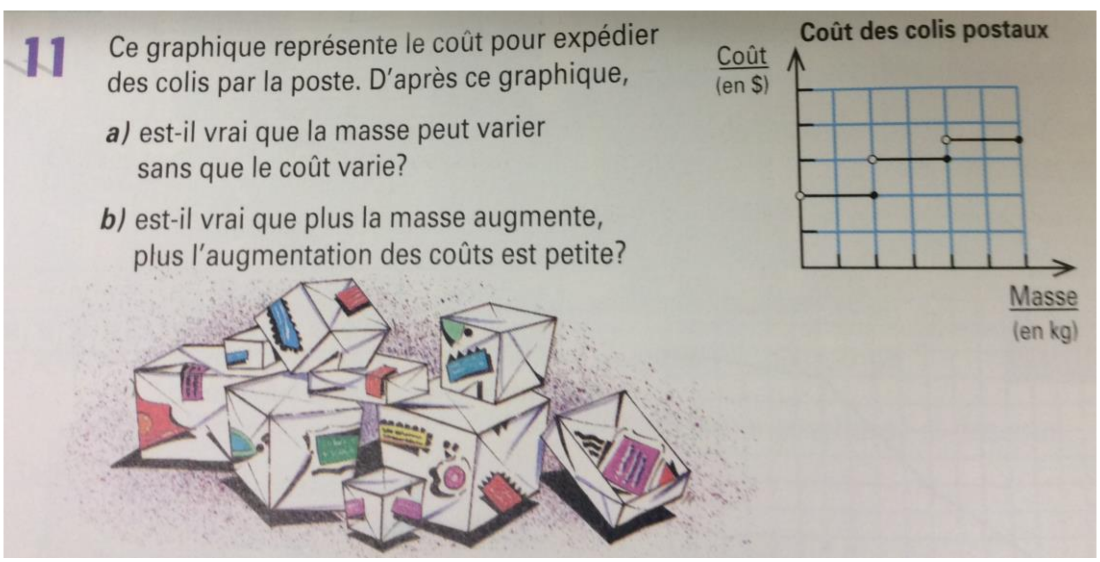


Figure 1 : Problème de colis dans le manuel *Carrousel*

Tableau 6 : Analyse du contexte d'un problème en algèbre

Titre de l'activité	manuel *Carrousel*, Breton (1994), volume 1, p.28. no 11		
Contexte de l'activité proposée	☒Réel Coût des colis	☐Imaginaire	☐Purement mathématique
Type de réalité correspondant	☐Naturelle	☒Activité humaine	
Tâche rattachée à l'activité proposée	☐Artificielle	☒Authentique fictive	☐Authentique réelle
Pertinence du contexte pour le raisonnement	☐Essentiel	☒Pertinent	☐Non pertinent

Source : mémoire de Cotnoir (2010)

Elle remarque une forte augmentation des contextes réels dans les chapitres introduisant l'algèbre (près de 11 % en 1968 à 60 % en 1994) et donc une évacuation quasi complète des contextes imaginaires. Concernant les types de réalité, elle constate que l'activité naturelle était présente dans les années 70 et la tendance s'inverse vers l'activité humaine dans les années 2000 (près 90 % des contextes réels). Cotnoir (2010) l'explique par l'avènement du PFEQ (MELS, 2006) qui prône la formation de bons citoyens et une sensibilisation sociale et internationale par le biais des domaines généraux de formation. Il y a également une augmentation significative des tâches authentiques et par le fait même une diminution des tâches artificielles. Pour ce qui est de la pertinence du contexte, il y a une augmentation des contextes essentiels au fil des années. Par contre, la pertinence du contexte pour le raisonnement de l'élève tend à diminuer entre les années 70 et les années 2000. Ce qui signifie qu'il y a plus de contexte, mais qu'il n'est pas nécessairement utile au problème ni à la résolution par l'élève.

1.4 OBJECTIFS ET QUESTIONS DE RECHERCHE

Ce qui précède montre que des travaux (Bednarz et Janvier, 1994; Marchand et Bednarz, 1999, 2000; Guzman, Bednarz et Hitt, 2003; Cotnoir, 2010; Antoun, 2012; Tremblay et Saboya, sous presse) ont été réalisés, à partir de critères différents, pour étudier les différents énoncés de problèmes en algèbre proposés dans les manuels scolaires. D'autres recherches (Grugeon, 1995; Marchand et Bednarz, 1999; Squalli, Mary et

Marchand, 2011; Saboya *et al.*, 2013) ont élaboré des questionnaires qui, à la suite de l'administration auprès des élèves, ont permis de confirmer une complexité appréhendée dans l'analyse des problèmes en algèbre.

Par contre, il n'a pas été possible de trouver de travaux qui se sont tournés vers l'expertise des enseignants pour ainsi y déterminer les critères qu'ils considèrent pour étudier la complexité des problèmes dans leur matériel didactique.

À la lumière de ces constats, les objectifs de cette recherche sont :

1) Co-construire une grille d'analyse de critères de complexité pour des problèmes écrits en algèbre à la croisée entre la recherche et la pratique;
2) Comparer les critères de complexité retenus dans la grille à ceux recensés par la recherche.

Questions de recherche :

1) Sur quels critères s'appuient les enseignants pour juger de la complexité les problèmes en algèbre ?
2) Est-ce que ces critères sont reconnus par la recherche ? Et si oui, sont-ils explicités de la même façon ?
3) Quels sont les critères de complexité retenus après discussion entre enseignants et chercheure ?
4) Comment se co-construit la grille d'analyse présentant les critères de complexité dans les problèmes écrits en algèbre entre enseignants de 2^{e} secondaire et chercheure ?

CHAPITRE 2
CADRE CONCEPTUEL

Ce projet de recherche s'intéresse à dégager des critères qui permettent de juger de la complexité d'un énoncé de problème écrit en algèbre, travail mené à la jonction de la pratique enseignante et des travaux de recherche. Avant de s'intéresser aux critères exprimés par les enseignants et retenus par les participants à cette recherche, il importe de s'attarder aux critères d'analyse des énoncés de problèmes provenant des recherches. Dans une première section sont présentées les définitions de certains concepts centraux dans ce projet : la définition de problème retenue, celle du raisonnement analytique qui est reliée aux problèmes en algèbre ainsi que celle de la complexité. Par la suite, une recension des critères d'analyse issus des travaux de recherche est rapportée sans ordre précis. Ces critères de complexité dans l'énoncé d'un problème sont issus de diverses recherches qui ne se situent pas toutes en algèbre : *la structure relationnelle, le contexte, le type de données fournies dans l'énoncé, les registres de représentation, le type de réponse, l'activité cognitive, les concepts présents dans différents champs mathématiques* et *le nombre, la nature et l'enchaînement des tâches*. Dans une troisième section, un lien est fait entre ces huit critères et les critères de complexité dégagés par le PFEQ (MELS, 2006). Finalement, une synthèse des critères retenus dans ce projet est présentée sous forme de tableau.

2.1 DÉFINITIONS RETENUES POUR CE PROJET

2.1.1 DÉFINITION DE PROBLÈME

Dans la littérature, différentes expressions langagières, *problème, exercice, tâche, situation, activité, situation-problème,* sont utilisées pour référer de près ou de loin à ce que l'on nomme « problème ». La distinction entre ces différentes expressions est étroitement liée au moment dans la séquence d'enseignement où un énoncé de problème est proposé aux élèves. L'intention didactique motivant le recours à un certain énoncé de problème colore l'orchestration didactique menée autour de cet énoncé et pourra tantôt le faire passer de situation-problème ayant pour objectif d'introduire une nouvelle manière de raisonner à un simple exercice. Douady (1986) évoque des conditions pour qu'un énoncé soit qualifié de problème : l'énoncé (contexte et question) a du sens pour les élèves, l'objectif est explicite, les élèves ont les connaissances pour s'engager dans la résolution, les outils (contenu ou méthode) sont adaptés au problème, le problème peut se formuler dans au moins deux cadres différents (voir l'explication sur les cadres de Douady au point 2.2.2). Pour Voyer (2006), un problème est un énoncé dont on ne connaît pas *a priori* la procédure de résolution et qui représente un défi raisonnable pour l'élève. La définition retenue est celle de Vergnaud (1977) et de Radford (1996) qui évoquent qu'un *problème* réfère à un énoncé constitué d'un contexte et d'un ensemble d'informations, dont un questionnement ou une consigne, nécessitant une recherche ou un traitement par l'entremise de concepts et d'outils mathématiques afin de produire un résultat ou une solution.

2.1.2 PROBLÈMES VISANT L'EXPRESSION D'UN RAISONNEMENT ANALYTIQUE

Comme introduit dans le précédent chapitre, cette recherche s'attarde plus particulièrement aux énoncés de problèmes dont la résolution vise l'expression d'un raisonnement analytique et non d'un raisonnement arithmétique. Selon Marchand et Bednarz (2000), le raisonnement analytique s'exprime lorsque l'élève « accepte dès le départ de mobiliser la ou les quantités inconnues par l'intermédiaire ou non d'un substitut symbolique, opérant alors sur l'inconnue comme si celle-ci était connue » (p.18) tandis que le raisonnement arithmétique est celui où l'élève « mobilise les grandeurs connues et organise pas à pas une séquence d'opérations qui, en fin de parcours, mène au résultat recherché » (p.18). Radford (2014) précise que le raisonnement analytique se reconnaît dans le traitement de quantités inconnues comme si elles étaient connues. Saboya *et al.*

(2013) ont analysé des copies d'élèves afin d'identifier le type de raisonnement déployé dans la résolution de problèmes écrits en algèbre. Ils ont classé les différentes procédures des élèves en raisonnement analytique (résolution algébrique explicite, position réajustée, raisonnement surplus/parts) et en raisonnement arithmétique (essais systématiques et jeu entre les nombres). La figure 2 (tirée de Saboya et *al.,* 2013, p.117) montre un exemple de raisonnement analytique de type *surplus/parts* où l'élève opère avec les inconnues comme si elles étaient connues même si l'utilisation explicite de lettres n'est pas présente. Ainsi, l'élève enlève le surplus du total des produits, le surplus correspond au nombre de produits en conserve et de produits laitiers qu'il y a en plus du nombre de produits céréaliers (460-(201+22)). Ces quantités sont représentées par deux relations additives que l'élève nomme « les surplus ». Ce nouveau total est ensuite divisé en trois parts égales, car il y a trois grandeurs en jeu. Finalement, les « surplus » sont remis au quotient qui correspond au nombre de produits céréaliers pour trouver le nombre de produits laitiers et le nombre de produits en conserve.

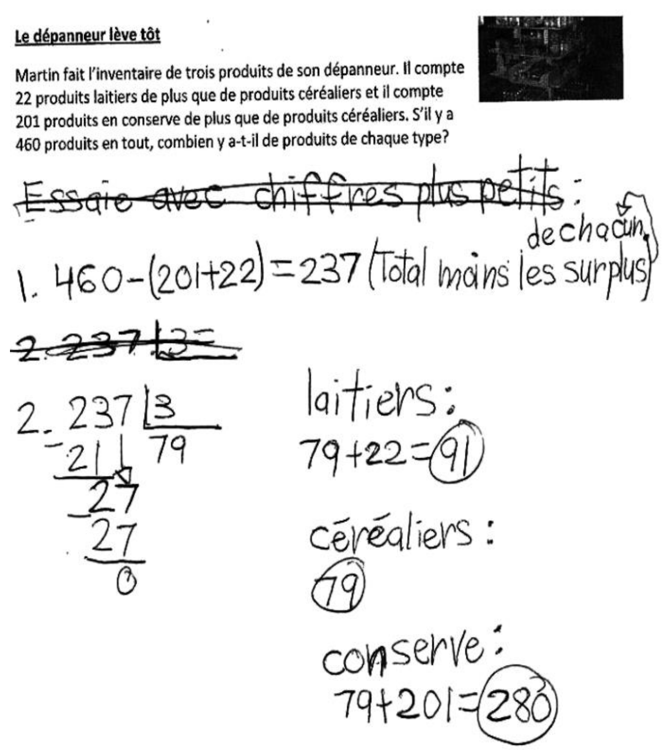


Figure 2 : Exemple d'un raisonnement analytique de type surplus/parts

La figure 3 (tirée de Saboya *et al.*, 2013, p.118) illustre un raisonnement arithmétique de type *jeu entre les nombres*. L'élève utilise les nombres donnés dans le problème : 429 qui correspond au nombre total de produits ainsi que 7 et 4 qui sont des relations multiplicatives reliant les nombres des trois produits entre eux. L'élève tente plusieurs opérations en partant de ces valeurs connues pour arriver au total de 429. Il est difficile de comprendre le sens attribué à ces opérations, ce qui classe cette production comme un *jeu entre les nombres*.

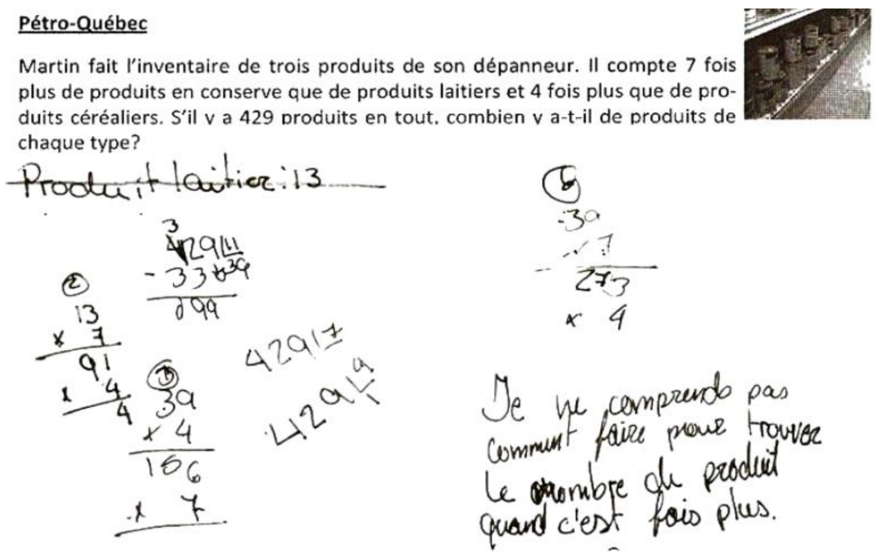


Figure 3 : Exemple d'un raisonnement arithmétique de type jeu entre les nombres

2.1.3 DÉFINITION DE COMPLEXITÉ

Roegiers (2003) rapporte que le problème complexe requiert de réinvestir et d'intégrer un ensemble de concepts et de procédures censé avoir été préalablement acquis. Ce qui doit être mobilisé par l'élève pour résoudre le problème fait donc partie de son bagage, ce qui doit préalablement avoir été objet d'un apprentissage. L'activité, réalisée par l'élève, de mobilisation de ressources doit être comprise en tant qu'opération de sélection de ressources. Ces dernières peuvent être de nature interne (ses connaissances et ses procédures) ou de nature externe (des personnes ou des outils disponibles dans le milieu).

Verschaffel et De Corte (2008) spécifient que les problèmes complexes comportent plusieurs étapes de résolution et nécessitent la mise en œuvre d'un processus complexe de modélisation[4] mathématique. Ce qui précède fait ainsi écho aux propos du PFEQ (MELS, 2006) : « une situation est complexe lorsqu'elle mobilise l'ensemble des composantes d'une compétence, représente un défi intellectuel, suscite un conflit cognitif, favorise la prise de risque et se prête à plus d'une démarche » (p.14).

2.2 CRITÈRES POUVANT INFLUENCER LA COMPLEXITÉ D'UN PROBLÈME

Différents facteurs influencent l'engagement dans la résolution d'un problème qui peuvent être regroupés en deux familles : les facteurs liés à l'élève et ceux liés à l'énoncé du problème. Voyer (2006) regroupe parmi les facteurs liés à l'élève le sexe, l'habileté en lecture, l'habileté en calcul, les connaissances usuelles, l'attitude envers les mathématiques et le milieu socio-économique. Cette recherche se concentre sur les facteurs liés à l'énoncé du problème qui sont ici nommés *critères*. Le Centre national de ressources textuelles (2012) définit un critère comme étant « un caractère, principe, élément auquel on se réfère pour juger, apprécier, définir quelque chose ».

Différents critères d'analyse des énoncés de problèmes sont identifiés dans les travaux de recherche. Parmi ces critères de complexité recensés dans les recherches citons ceux qui réfèrent à la **structure relationnelle** de l'énoncé (Heller et Greeno, 1978; Vergnaud, 1982; Carpenter et Moser, 1982; Carpenter, Hiebert, Moser, 1983; Riley, Greeno et Heller, 1983; Bednarz et Janvier, 1994; Marchand et Bednarz, 1999, 2000; Guzman, Bednarz et Hitt, 2003; Saboya *et al.*, 2013; Tremblay et Saboya, sous presse), au **contexte** (Caldwell et Goldin, 1979, 1987; Mayer, 1981; Douady, 1986; MEQ, 1988;

[4] Le processus complexe de modélisation induit la construction d'une représentation du problème, la modélisation de cette représentation sous la forme mathématique, la mise en œuvre de ce modèle et la communication.

Sebrechts *et al.*, 1996; Pocheron, 1998; Koedinger et Nathan, 2004; Murray, Clermont et Binkley, 2005; Nogry et Didierjean, 2007; OCDE, 2013), au **type de données fournies dans l'énoncé** (Englert, 1987; MEQ, 1988; Kouba, 1988; Carpenter *et al.*, 1989; Muth, 1991; Leon, 1992; Sebrechts *et al.*, 1996; Leung et Silver, 1997; Eynard-Bontemps et Sibari, 2006), aux **registres de représentation** en jeu (Moschkovich, 1992; Duval, 1993; Yerushalmy, De Serres et Groleau, 1997; Chazan, 2002; Gagatsis et Elia, 2004; Murray, Clermont et Binkley, 2005; MELS, 2006; Sayac et Grapin, 2013), au **type de réponse** attendue (Booth, 1988; MEQ, 1988; Sheehan, 1997; DeMars, 1998; Sayac et Grapin, 2013), à l'**activité cognitive** appréhendée chez l'élève (Gras, 1979; Enright et Sheehan, 2002; Bodin, 2004; OCDE, 2013), aux **concepts présents dans différents champs mathématiques** (Carpenter *et al.*, 1980; Kouba, 1988; Bodin, 2002; Enright et Sheehan, 2002; MELS, 2006; Voyer, 2006, Beaulac, 2006; Roditi, 2007; OCDE, 2013) et au **nombre**, **à la nature et à l'enchaînement des tâches** (Lester, 1980; Jonnaert, Pallascio et Peltier, 1990; Enright et Sheehan, 2002; Antoun, 2012). D'un point de vue méthodologique, ces critères sont de potentiels leviers pour interpréter, comparer et enrichir les critères qui sont relevés par les enseignants. Ces critères sont expliqués plus en détail dans ce qui suit en prenant appui sur différents travaux de recherche.

2.2.1 STRUCTURE RELATIONNELLE

La typologie de la structure relationnelle est organisée selon la nature des opérations en jeu et la place de l'inconnue. Plusieurs chercheurs (Carpenter *et al.*, 1980; Vergnaud, 1982; Riley, Greeno et Heller, 1983; Bednarz et Janvier, 1994; Baffrey-Dumont, 1996; Sebrechts *et al.*, 1996; Marchand et Bednarz, 1999, 2000; Enright et Sheehan, 2002; Floc'h et Pfaff, 2005; Saboya *et al.*, 2013; Oliveira et Rhéaume, 2014; Tremblay et Saboya, sous presse) mentionnent que la structure relationnelle d'un problème peut influencer sa complexité.

Bednarz et Janvier (1994) distinguent des problèmes *connectés* et les problèmes *déconnectés* (voir tableau 7). Dans les problèmes *connectés,* « une relation peut facilement être établie entre deux données connues, induisant alors un raisonnement de type arithmétique s'articulant sur les données connues du problème pour aboutir en fin de processus à retrouver la donnée inconnue » (p.279). Pour les problèmes *déconnectés*, « aucun pont ne peut être établi *a priori* directement entre les données connues du problème » (p.279). Les chercheures précisent que les problèmes déconnectés favorisent l'utilisation de l'algèbre, soit l'expression d'un raisonnement analytique. La reconnaissance des problèmes déconnectés est donc un outil pertinent pour sélectionner des problèmes favorisant l'introduction de l'algèbre.

Tableau 7 : Distinction entre un problème connecté et un problème déconnecté

	Problème connecté	**Problème déconnecté**
Énoncé du problème	Karine a 60 fruits dans son panier. Elle a 10 pommes et 3 fois plus d'oranges que de pommes. Le reste des fruits sont des fraises. Combien a-t-elle de fraises ?	Karine a 60 fruits dans son panier. Elle 10 pommes de moins que de fraises et 3 fois plus d'oranges que de pommes. Combien a-t-elle de fraises ?
Analyse	Ce problème est connecté. La donnée initiale (nombre de pommes), la donnée totale (nombre de fruits) et les relations (3 fois plus, le reste) sont connues. Ainsi, connaissant la donnée initiale qui est le nombre de pommes, les autres données (le nombre d'oranges et le nombre de fraises) sont calculées en s'appuyant sur les relations qui relient les quantités entre ces trois fruits et qui sont des relations connues.	Ce problème est déconnecté. La donnée totale (nombre de fruits) et les relations (10 de moins, 3 fois plus) sont connues. Par contre, la donnée initiale (nombre de pommes) est inconnue. On ne peut pas faire comme dans le problème à gauche et partir du nombre de pommes pour trouver le nombre d'oranges et de fraises, car le nombre de pommes n'est pas connu. C'est une réflexion sur les relations connues qui va permettre de générer un raisonnement pour déterminer la quantité des différents fruits.

Source : Problèmes proposés au projet du Chantier 7 (2014-2018)

2.2.1.1 PROBLÈMES CONNECTÉS

Les problèmes connectés se divisent en deux catégories : les *structures additives* regroupent les problèmes ayant des additions et/ou des soustractions et les *structures multiplicatives* sont composées des multiplications et/ou des divisions. Le classement de ces problèmes se fait par l'entremise des relations entre les données et sur la place de l'inconnue. Les chercheurs distinguent différentes catégories dans les problèmes de structure additive. Ces catégories selon Heller et Greeno (1978) sont : *combinaison*, *changement*, et *comparaison*. Vergnaud (1982) les classe en problèmes de *réunion (ou composition)*, d'*ajout/retrait (ou transformation)* et de *comparaison*. Carpenter et Moser (1982) ont établi quant à eux les problèmes d'*égalisation*. De son côté, Riley, Greeno et Heller (1983) classent les problèmes selon les catégories : *combinaison*, *changement*, *comparaison* et *égalisation*. Plusieurs de ces catégories identifiées par les chercheurs se recoupent même si elles portent des noms différents. Pour les problèmes de structure multiplicative, Vergnaud (1982) les classe en deux catégories : les problèmes de comparaison et les problèmes de taux.

Ainsi, un problème de réunion (ou de combinaison ou de composition) est composé d'un ensemble (tout) et de ses parties. Il est possible de chercher le tout ou une de ses parties. Un problème d'ajout/retrait (ou de transformation ou de changement) propose une transformation de l'état initial qui conduit à l'état final. Les problèmes proposés conduisent à rechercher soit l'état initial, soit l'état final, ou encore la transformation. Un problème de comparaison invite à comparer au moins deux grandeurs par l'entremise d'expressions comme « deux de moins » si le problème est de structure additive ou « trois fois plus » si le problème est de structure multiplicative. On peut rechercher l'un des états ou la relation. Un problème d'égalisation fait référence à une équivalence entre des grandeurs. Le tableau 8 présente des exemples de problèmes connectés.

Tableau 8 : Exemples de problèmes connectés

Catégorie	**Exemple de problème**
Réunion (recherche d'une partie)	Léo a 3 billes. Léo et Juliette ont ensemble 10 billes. Combien de billes Juliette a-t-elle ?
Retrait (recherche de l'état final)	Léo avait 8 billes puis il a donné 5 billes à Juliette. Combien de billes a maintenant Léo ?
Égalisation	Léo a 6 billes. Juliette a 14 billes. Que pourrait Léo faire pour avoir autant de billes que Juliette ?
Comparaison (recherche de la relation) : structure additive	Léo a 3 billes. Juliette en a 9. Combien de billes Juliette a-t-elle de plus que Léo ?
Comparaison (recherche d'un état) : structure multiplicative	Léo a 15 billes. Juliette a trois fois plus de billes que Léo. Combien de billes Juliette a-t-elle ?

Les recherches de Vergnaud (1982) ont permis de dégager des niveaux de complexité selon la structure relationnelle. Par exemple, dans les problèmes de structure additive, les problèmes de réunion sont considérés plus simples que ceux d'ajout/retrait tandis que les problèmes de comparaison sont les plus complexes. De plus, à l'intérieur de chacune de ces catégories, il est possible de se prononcer sur la complexité des divers problèmes selon ce qui est donné et ce qui recherché : une des parties, l'état initial, l'état final ou la relation. Vergnaud (1982) ainsi que Fayol et Abdi (1986) confirment que les problèmes dont l'inconnue porte sur l'état initial sont plus complexes que ceux dont l'inconnue porte sur l'état final. Des travaux similaires ont pris place autour des structures multiplicatives afin de juger de la complexité d'un problème.

2.2.1.2 PROBLÈMES DÉCONNECTÉS

Bednarz et Janvier (1994) catégorisent les problèmes *déconnectés* en trois classes : les problèmes avec des relations de comparaison, les problèmes avec des taux et les problèmes comportant des transformations. Ces chercheures utilisent une schématisation de ces problèmes inspirée de celle proposée dans les travaux de Vergnaud (1982). Pour schématiser les relations de comparaison une flèche courbe est utilisée (voir figure 4), les relations de taux sont représentées par un segment (voir figure 5) et les relations de transformation dans le temps par une flèche (voir figure 6).

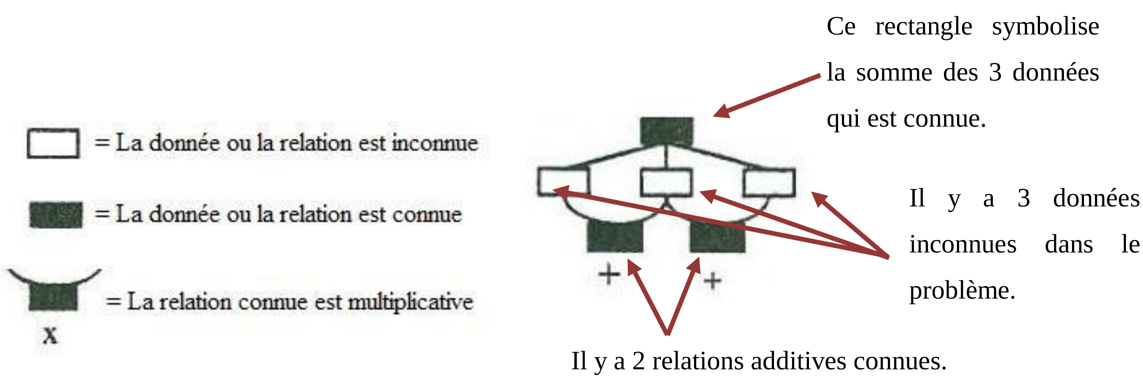
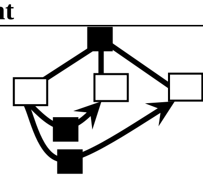
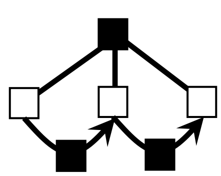
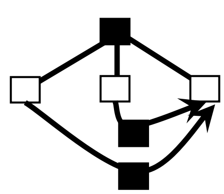


Figure 4 : Représentation d'un problème de comparaison

2.2.1.2.1 PROBLÈMES IMPLIQUANT DES RELATIONS DE COMPARAISON

Les problèmes de *comparaison* ou de « partage inéquitable » renvoient à la comparaison d'au moins deux données connues ou inconnues. Selon Marchand et Bednarz, (1999), le nombre de grandeurs ou d'inconnues en jeu (deux, trois ou plus), la nature des relations (additives et/ou multiplicatives) et l'enchaînement des relations (source, composition, puits) dans les problèmes sont des éléments à considérer pour déterminer la complexité des problèmes impliquant des comparaisons. Donc, un problème comportant seulement des relations additives ou seulement des relations multiplicatives est considéré comme moins complexe qu'un problème comportant à la fois des relations additives et multiplicatives (Saboya *et al*., 2013). Ainsi, la relation « deux de moins que le double de » est considérée plus complexe que la relation « le double de ». L'enchaînement des relations réfère aux liens qui unissent chacune des grandeurs ou inconnues présentes en considérant une grandeur/inconnue de départ à une grandeur/inconnue d'arrivée. Pour les problèmes impliquant des relations de comparaison avec trois inconnues ou trois grandeurs, Bednarz et Janvier (1994) ont catégorisé, du plus simple au plus complexe, trois types d'enchaînements : source, composition et puits (voir tableau 9).

Tableau 9 : Structures de problèmes impliquant des relations de comparaison

Exemple de problèmes impliquant de la comparaison et le schéma correspondant		**Analyse des problèmes**
Frédéric, Lucie et Roger ont ensemble 55 albums de bandes dessinées. Lucie a 15 albums de plus que Frédéric et Roger a le double d'albums de Frédéric. Combien d'albums chacun a-t-il ?		Nombre de grandeurs en jeu : 3 Nature des relations : 15 de plus (structure additive) Double (structure multiplicative) Enchaînement des relations : source
Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site Facebook. Sophia a 3 fois plus d'amis que Carlos et François a 114 amis de plus que Sophia. Si au total ils sont 380 amis, combien d'amis ont-ils chacun ?		Nombre de grandeurs en jeu : 3 Nature des relations : 3 fois (structure multiplicative) 114 de plus (structure additive) Enchaînement des relations : composition
Un camp de jour offre trois activités de plein air. Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le soccer regroupe 127 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles ?		Nombre de grandeurs en jeu : 3 Nature des relations : 98 de plus et 127 de plus (structure additive) Enchaînement des relations : puits

Source : article Saboya *et al.* (2013)

Un problème de type *source* implique deux relations additives et/ou multiplicatives qui ont comme point de départ la même grandeur/inconnue. Un problème de type *composition* comporte deux relations dont la grandeur/inconnue d'arrivée de l'une des relations est la grandeur/inconnue de départ de l'autre relation. Un problème de type *puits* considère deux relations qui ont la même grandeur/inconnue d'arrivée. Plusieurs chercheurs (Marchand et Bednarz, 1999, 2000; Saboya *et al.*, 2013; Oliveira et Rhéaume, 2014) ont validé ce classement en complexité dans les problèmes de comparaison.

2.2.1.2.2 PROBLÈMES IMPLIQUANT UNE OU DES TRANSFORMATION(S)

Les problèmes de *transformation* impliquent une donnée de « départ (inconnue) donnant lieu à un nouvel état (elle aussi inconnue) » (Marchand et Bednarz, 1999, p.33). Ces problèmes sont souvent en relation avec un changement dans le temps. Cependant, les problèmes déconnectés ayant des relations de transformation ont été peu étudiés par les chercheurs. Par contre, les problèmes connectés ayant des relations de transformation ont fait l'objet de plusieurs études comme celle menée par Baffrey-Dumont (1996). Voici un exemple de problème de transformation déconnecté avec la schématisation associée (voir figure 5) tirée de Marchand et Bednarz (1999) :

Luc a 3,50 \$ de moins que Michel. Luc a le double de son d'argent tandis que Michel augmente le sien de 1,10 \$. Maintenant Luc a 0,40 \$ de moins que Michel. Combien Luc et Michel ont-ils chacun à présent ?

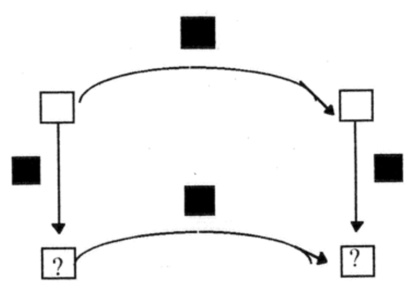


Figure 5 : Exemple et schématisation d'un problème de transformation

2.2.1.2.3 PROBLÈMES IMPLIQUANT DES TAUX

Les problèmes de *taux* impliquent un « certain lien entre des grandeurs non-homogènes » (Marchand et Bednarz, 1999, p.33). Par exemple, dans le problème suivant et la figure 6 qui le schématise, l'argent est mis en relation avec la quantité de paniers ce qui constitue un taux.

> Judith et Pauline cueillent des fraises. Judith reçoit 14,50 $/panier tandis que Pauline reçoit 13,50 $/panier. Si ensemble, elles ont accumulé 223 $ et amassé 16 paniers, combien de paniers a amassé Judith ?

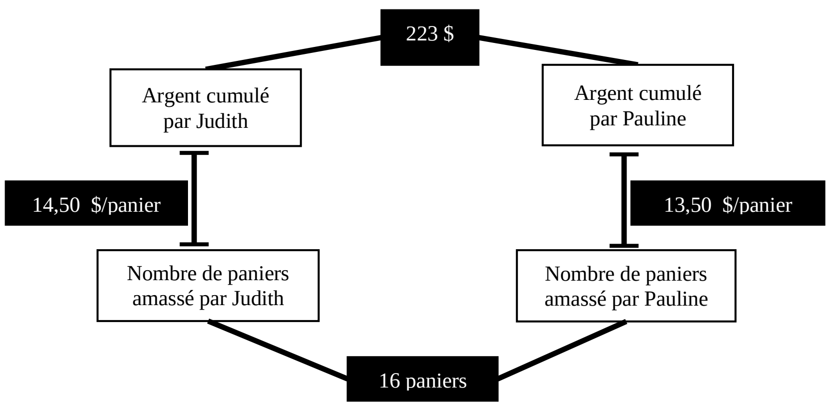


Figure 6 : Exemple et schématisation d'un problème de taux

Guzman, Bednarz et Hitt (2003) ont classé les problèmes de taux en huit catégories selon divers éléments : la nature des liens de type taux, la formulation du taux et la structure du taux. La nature des liens peut être spatio-temporelle, non spatio-temporelle ou de grandeur discrète. Le lien spatio-temporel évoque une connotation avec le temps par exemple l'accélération, la vitesse ou le débit. Le lien non spatio-temporel peut représenter le prix par unité de masse ou de volume, le salaire ou encore la concentration d'une solution ou d'un alliage métallique. La grandeur discrète est liée à un nombre d'objets ou à une quantité discrète par catégorie d'objets par exemple le nombre de billes par sac. Pour Guzman, Bednarz et Hitt (2003), le taux peut s'exprimer de façon explicite, semi-implicite ou implicite. Par exemple, le taux peut être de 100 km/h (explicite), de 200 km en 2 heures (semi-explicite) ou « la même vitesse que la limite d'autorisée sur l'autoroute » (implicite). De plus, le taux peut être représenté sous la forme écrite en mots (15 kilomètres en une heure) ou sous la forme de symbole (15 km/h). Le tableau 10 propose des exemples de problèmes impliquant des taux avec une analyse de chacun de ces problèmes selon les éléments ressortis par ces chercheurs.

Tableau 10 : Exemples de différents problèmes de taux et analyse

Exemples de problème de taux	**Analyse**
Annie et Claudine font une course à relais en vélo. Elles parcourent ensemble 115 kilomètres en 4,9 heures. Annie pédale à 50 kilomètres en 2 heures et Claudine pédale 131 kilomètres en 5 heures. Quelle distance a parcouru Annie ?	Nature : lien spatio-temporel (vitesse) Formulation du taux : semi-implicite (50 kilomètres en 2 heures, 131 kilomètres en 5 heures) Représentation : en mots
Dans une ferme, le fermier compte ses animaux, soit des poules et des moutons. Il y a au total 82 pattes et 28 têtes. Combien y a-t-il de moutons dans cette ferme ?	Nature : grandeur discrète Formulation du taux : implicite (une poule a 2 pattes et un mouton a 4 pattes) Représentation : en mots
Judith cueille des fraises et reçoit 14,50 $/panier. Pauline reçoit 13,50 $/panier. Si ensemble, elles ont accumulé 223 $ et amassé 16 paniers, combien de paniers a amassé Judith ?	Nature : lien non spatio-temporel (salaire) Formulation du taux : explicite Représentation : en symboles ($/panier)

Source : Problèmes proposés dans le cadre de la recherche-action dirigée par Tremblay, M. subvention de type Chantier 7, MELS (2014-2018)

2.2.1.2.4 PROBLÈMES DE MISE EN ÉGALITÉ

En étudiant les problèmes proposés dans les manuels scolaires au Québec, Tremblay et Saboya (sous presse) ont ciblé parmi les problèmes déconnectés, ceux dont l'expression d'un raisonnement analytique est nécessaire à la résolution, et plus précisément, ceux dont l'usage du symbolisme algébrique est l'outil privilégié. Ce travail les a conduites à distinguer les problèmes qu'elles nomment de *mise en égalité*. Ce sont des « problèmes dont la modélisation peut se traduire par une équation où l'on retrouve l'inconnue dans les deux membres de l'égalité et prenant la forme ax+b = cx+d » (p.6). Ces problèmes combinent souvent des relations de comparaison et peuvent inclure la classe *taux* ou la classe *transformation*. Ce sont des problèmes dont la mathématisation n'est pas évidente et qui sont usuellement considérés plus difficiles pour les élèves. En effet, devant ce type de problème, l'élève doit être conscient qu'une même grandeur peut s'exprimer de deux façons différentes pour ensuite mettre en égalité ces deux expressions et résoudre l'équation associée. Cette structure se rapproche d'un système d'équations qui est au programme au deuxième cycle du secondaire. Marchand et Bednarz (1999) ont également constaté que les problèmes invitant à utiliser la forme « ax + b = cx + d » sont plus complexes même si elles ne les distinguent pas comme une autre classe de problèmes. Tremblay et Saboya (sous presse) ont identifié trois types de formulation de la relation d'égalité : explicite (« est égal à », « équivaut à », « correspond au double de »), plus ou moins implicite et implicite. Ces chercheures affirment que la formulation implicite de la relation d'égalité est plus complexe que les deux autres catégories. La figure 7 montre la schématisation associée à un problème de mise en égalité dont la mise en égalité est implicite[5] :

Jules est l'heureux père de quatre beaux garçons. Le plus vieux a quatre ans de plus que le deuxième, qui est quatre ans plus vieux que le troisième, qui est lui-même plus vieux de quatre ans par rapport au plus jeune. Ce dernier est deux fois moins âgé que le plus vieux des fils. Quel est l'âge de chacun des fils de Jules ?

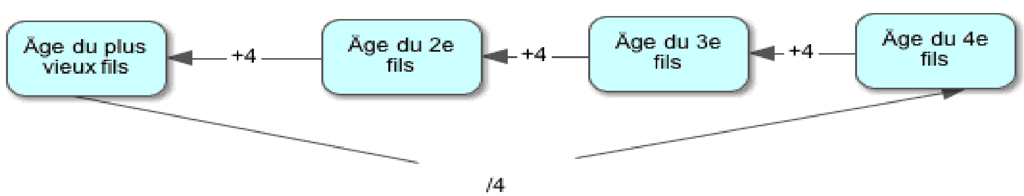


Figure 7 : Exemple et schématisation d'un problème de mise en égalité

Ainsi, les problèmes déconnectés peuvent être répartis en quatre catégories : comparaison, transformation, taux et mise en égalité. Ce critère est important pour juger de la complexité d'un énoncé de problème.

[5] La schématisation de Tremblay et Saboya (sous presse) diffère un peu de celle de Bednarz et Janvier (1994), car elles explicitent les taux par les relations qui unissent deux grandeurs hétérogènes.

2.2.2 CONTEXTE

Le contexte réfère à l'habillage du problème (Nguala, 2006) et permet à l'élève de donner du sens à un problème de mathématique (Douady 1986). Selon Koedinger et Nathan (2004), le contexte permet de développer une meilleure compréhension des connaissances en jeu et des connaissances antérieures en plus d'apporter une plus grande motivation lors de la résolution. Le PFEQ (MELS, 2006) stipule qu'une situation est contextualisée dans la mesure où elle s'inspire « des domaines généraux de formation[6], des repères culturels[7], des éléments du contenu de formation, d'un événement survenu en classe, dans l'école ou dans la société » (p.12). Nogry et Didierjean (2007) soulignent que lorsque deux problèmes sont similaires du point de vue structurel (problèmes isomorphes), le contexte peut influencer la représentation ou la compréhension du problème. Dans le tableau 11, deux exemples sont présentés pour lesquels la structure relationnelle est la même (problème connecté de type réunion cherchant l'état final), mais le contexte diffère. Il apparaît que le problème faisant appel aux watts (unité de puissance) est moins familier aux élèves que le problème des parts de pizza, le premier pouvant donc être potentiellement considéré plus complexe. Ainsi, l'appropriation de certains problèmes dont le contexte est issu de la vie peut être plus difficile si le contexte n'est pas familier à l'élève (Sebrechts *et al.*, 1996).

Tableau 11 : Problèmes isomorphes ayant des contextes différents

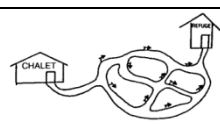
Problème de pizza	**Problèmes de watts**
Antoine mange un quart de pizza une journée et deux pizzas complètes le lendemain. Combien a-t-il mangé de pizza ?	Antoine utilise un quart de watt pour allumer sa lumière et deux watts le lendemain. Combien a-t-il utilisé de watts ?
Résolution : ¼ + 2	Résolution : ¼ + 2

[6] Dans le PFEQ (MELS, 2006), les domaines généraux de formation sont Santé et bien-être, Environnement et consommation, Médias, Orientation et entrepreneuriat, Vivre-ensemble et citoyenneté.

[7] Les repères culturels permettent à l'élève de situer les concepts mathématiques dans leur contexte historique et social, de les apprécier dans la vie quotidienne tout en suggérant des liens avec les autres disciplines. Par exemple, un problème en algèbre peut référer à une relation entre le temps travaillé et le salaire reçu ou peut faire un lien avec la suite de Fibonacci.

Le MEQ (1988) a publié un document appelé fascicule K portant spécifiquement sur la résolution de problèmes. Dans ce document, les contextes sont séparés en quatre catégories : *réel, réaliste, fantaisiste et purement mathématique* (voir tableau 12). Un contexte est *réel* s'il se produit réellement dans la vie de l’élève. Un contexte *réaliste* est celui qui susceptible de se produire ou celui qui simule la réalité. Un contexte est *fantaisiste* s’il est le fruit de 1'imagination et qu’i1 est sans fondement dans la réalité. Le contexte est *purement mathématique* s’i1 fait exc1usivement référence à des objets mathématiques comme des nombres, des relations, des opérations, des figures géométriques. Le PFEQ (MELS, 2006) réitère que les situations sont « plus ou moins familières, réelles ou fictives, réalistes ou fantaisistes, ou encore purement mathématique » (p.21). Dans la recherche, Koedinger et Nathan (2004) ont démontré dans leurs travaux que les problèmes se sont avérés plus faciles à résoudre par les élèves lorsque le problème est contextualisé, car la présence du contexte les aide à comprendre, poser et résoudre l’équation algébrique.

Tableau 12 : Différentes catégories de contexte selon MEQ (1988)

<u>Contexte réel</u> Construis un système de repérage des chaises dans le gymnase pour le spectacle de fin d'année et représente-le à l'aide d'un plan du gymnase.	<u>Contexte purement mathématique</u> En uti1isant 1es nombres 3, 28, 67 et 85 une seu1e fois chacun et 1es quatre opérations au choix, trouve une suite d'opérations qui te permettrait d’arriver 1e plus près possible de 2039. Tu peux uti1iser ta ca1cu1atrice.
<u>Contexte réaliste</u> Avec des amis, Claude fait une excursion en montagne. Voici le plan des sentiers qui  leur permettent, en partant du chalet, de se rendre au refuge. Combien y a-t-il de façons différentes de se rendre au refuge ?	<u>Contexte fantaisiste</u> Un professeur spécia1 donne à ses é1èves 1 minute de récréation 1a première journée de c1asse, 2 minutes 1a deuxième journée, 4 minutes 1a troisième, 8 minutes, 1a quatrième, etc. Combien de minutes de récréation auront-i1s à 1a fin de 1a deuxième semaine de c1asse ?

Douady (1986) a analysé les différents contextes utilisés en mathématique à travers la notion de cadre : « un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuelles diverses et des images mentales associées à ces objets et ses relations » (p.4). Elle distingue le cadre numérique (nombres, opérations sur les nombres, relation d’ordre, propriétés des calculs), le cadre algébrique (méthodes de résolution), le cadre fonctionnel (suites, fonctions, table de valeurs, graphique) et le cadre géométrique (périmètre, aire, angles). De plus, le changement de cadres (jeux de cadres) est « un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permet un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation » (Douady, 1986, p.4). Dans le tableau 13, l'expression 3(x+2) est représentée dans différents cadres en restant dans le même registre de représentation (voir le point 2.2.4), c'est-à-dire sous forme de mots.

Tableau 13 : Variation des jeux de cadres pour une même expression algébrique

Cadre	**Expression étudiée : 3(x+2)**
Cadre numérique	J'ai un nombre auquel j'ajoute 2 et ensuite je multiplie le tout par 3.
Cadre géométrique	Le périmètre d'un triangle équilatéral dont chaque côté mesure x + 2.
Cadre algébrique	Le produit de 3 et la somme de 2 et de x.
Cadre fonctionnel	Une expression du premier degré à une inconnue qui si elle est écrite sous la forme y=3(x+2) représente une fonction du premier degré dont le taux de variation est de 3 et l'ordonnée à l'origine est 6.

Source : Problèmes proposés dans le cadre de la recherche-action dirigée par Tremblay, M. subvention de type Chantier 7, MELS (2014-2018)

Caldwell et Goldin (1979, 1987) soulignent que les problèmes peuvent être *abstraits* ou *concrets* en plus d'être *factuels* ou *hypothétiques* (voir tableau 14). Les problèmes *abstraits* font appel à des objets symboliques et abstraits qui pourraient s'apparenter au contexte purement mathématique du MEQ (1988). À l'opposé, les problèmes *concrets* font référence à des objets réels, soit un contexte réaliste ou réel selon la classification du MEQ (1988). Un problème *factuel* fait état d'une description tandis qu'un problème *hypothétique* implique non seulement une description, mais aussi un possible changement. Il convient de préciser qu'un problème *factuel* ou *hypothétique* pourrait être relié à un autre critère de complexité, soit *Activité cognitive* qui est traitée au point 2.2.6.

Tableau 14 : Différentes catégories de contexte selon Caldwell et Godin (1979, 1987)

Problème concret et factuel Un fermier a huit poules de plus que de chiens. Chaque poule a deux pattes et chaque chien a quatre pattes. Quand tous les animaux sont réunis, il y a 118 pattes. Combien de chiens le fermier possède-t-il ?	Problème abstrait et factuel La valeur d'un nombre est six plus que la valeur d'un second nombre. La somme de deux fois le premier nombre et quatre fois le second nombre est de 126. Quelle est la valeur du second nombre ?
Problème concret et hypothétique Il y a quatre filles de plus que de garçons dans une classe d'anglais. S'il y avait six fois plus de filles et deux fois plus de garçons, il y aurait 136 élèves. Combien de garçons sont dans cette classe ?	Problème abstrait et hypothétique Un nombre est six fois plus grand qu'un second nombre. Si le premier nombre était quatre fois plus grand et que le second deux fois plus grand, la somme serait de 126. Quel est le second nombre ?

Leurs travaux ont permis de démontrer que les problèmes concrets sont significativement plus faciles que les problèmes abstraits. Les problèmes factuels sont plus faciles que les problèmes hypothétiques pour les élèves du niveau secondaire. Selon Caldwell et Goldin (1979, 1987), la gradation de difficulté de ces différents types de problèmes pour des élèves du niveau primaire et du premier cycle du secondaire est : concret factuel, concret hypothétique, abstrait hypothétique et abstrait factuel.

D'autres chercheurs se sont intéressés à classifier les contextes et à identifier ceux qui peuvent influencer la complexité d'un problème. Mayer (1981) a analysé 1 500 énoncés de problèmes du niveau secondaire aux États-Unis et a retenu huit familles qui sont définies à partir du contexte qui « habille » la source de la formule. Les huit familles sont : *taux lié au temps* (exemple : distance x taux = temps), *taux lié au coût unitaire*, *taux lié au coût en pourcentage*, *taux direct*, *géométrie* (exemple : aire = longueur x largeur), *lié à des lois physiques*, *statistique, nombres*. En prenant une famille, il dégage des sous-catégories qui précisent les contextes où la formule-source peut être utilisée. Murray, Clermont et Binkley (2005) procèdent à une classification du contexte réel en quatre catégories : *vie quotidienne, travail*, *vie sociale et formation complémentaire*. PISA (OCDE, 2013) vise à rendre les mathématiques accessibles dans des situations variées tirées du monde réel : *situation personnelle, sociétale, professionnelle et scientifique*. Finalement, dans sa thèse, Porcheron (1998) considère différents supports pour les contextes : *l'appui sur une situation vécue* (projet de sortie, construction d'un objet, simulation…) qui se rapproche d'un contexte réel (MEQ, 1988); *l'intérieur des mathématiques* (exemple : combien de nombres est-il possible d'écrire avec seulement les 3 chiffres 2,5,7 ?) qui évoque le contexte purement mathématique (MEQ, 1988) et *l'évocation de la réalité* (exemples : nombre de places au stade, problème d'achat) qui rappelle le contexte réaliste (MEQ, 1988). Les contextes établis par le MEQ (1988) sont ceux utilisés fréquemment au Québec. Cette sous-section permet de remarquer que plusieurs chercheurs proposent d'analyser les énoncés de problèmes en s'intéressant au contexte même s'ils n'en parlent pas tous de la même façon.

2.2.3 TYPE DE DONNÉES FOURNIES DANS L'ÉNONCÉ

Le MEQ (1988) a classé les problèmes selon les données fournies et l'adéquation ou non pour sa résolution : d*onnées complètes, superflues, manquantes et insuffisantes* (voir tableau 15). Un problème ayant des données dites complètes présente, de façon explicite, toutes les informations nécessaires à sa résolution. Un énoncé dont les données sont dites superflues est constitué d'informations non nécessaires à la résolution du problème. Un problème avec des données manquantes ne présente pas toutes les informations nécessaires à la résolution, il faut les chercher à l'extérieur du problème. Des données insuffisantes sont des informations qui ne sont pas présentes dans le problème et qu'on ne peut pas trouver. Ces propos rappellent le mémoire d'Antoun (2012) évoqué dans la problématique concernant la présence ou non d'informations.

Tableau 15 : Types de données selon MEQ (1988)

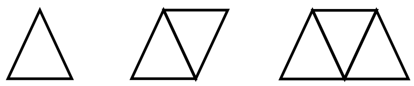
<u>Données complètes</u> Le père de Claude veut construire un patio ayant la forme d'un rectangle de 5 mètres par 4 mètres. Il a acheté des tuiles carrées de 50 centimètres de côté. Combien de tuiles utilisera-t-il pour construire ce patio ?	<u>Données insuffisantes</u> Un autobus s'arrête une première fois: 2 passagers descendent et 7 passagers montent. À l'arrêt suivant, 1 passager descend et 9 passagers montent. Enfin au troisième arrêt, tous les passagers descendent. Combien de passagers sont descendus au troisième arrêt ?
<u>Données manquantes</u> Quelle quantité de tapis faudrait-il acheter pour couvrir le plancher du hall d'entrée de ton école ?	<u>Données superflues</u> Sergio avait 25 $. Il a acheté 1 disque à 8 $, 1 revue à 3 $ et 1 poster dont il a oublié le prix. Il a tout dépensé sauf 2 $. Combien a-t-il dépensé ?

Selon le type de données fournies dans le problème, la complexité peut varier comme le soulignent certains chercheurs. Ainsi, Kouba (1988), Carpenter *et al.* (1989), Muth (1991), Leon (1992), Sebrechts *et al.* (1996), Leung et Silver (1997) et Eynard-Bontemps et Sibari (2006) établissent que les problèmes ayant des informations non pertinentes réduisent les performances des élèves dans l'obtention de la réponse adéquate. Dans le même sens, Englert (1987) a établi que les informations numériques non pertinentes ont eu une incidence négative sur la performance des élèves tandis que les informations linguistiques non pertinentes n'ont pas eu d'incidence sur leur performance.

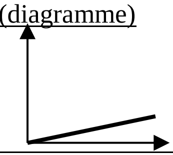
2.2.4 REGISTRES DE REPRÉSENTATION

Les registres de représentation peuvent influencer la complexité d'un problème (Duval, 1993; Gagatsis et Elia, 2004; Murray, Clermont et Binkley, 2005; Sayac et Grapin, 2013). Duval (1993) s'appuie sur la théorie cognitiviste, pour s'intéresser aux registres sémiotiques ou de représentation permettant de mesurer le niveau d'abstraction mathématique atteint par les élèves. Duval (1993) décrit un registre de représentation sémiotique comme « des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement » (p.39). Il présente des exemples de représentations sémiotiques comme des *figures géométriques, des graphes, l'écriture symbolique, le langage naturel, la formule algébrique*. Murray, Clermont et Binkley (2005) ont classé les différentes représentations possibles de l'information mathématique de la façon suivante : *objets et illustrations, nombres et symboles, formules, diagrammes et cartes géographiques, graphiques, tableaux et texte*. Le PFEQ (MELS, 2006) définit un registre de représentation comme « un système de « traces perceptibles » (représentation) qui comporte des règles de conformité, de transformation et de conversion » (p.8). Il spécifie également dans l'annexe D (MELS, 2006) qu'en algèbre les différents registres sont : *verbal, en mots, symbolique* : numérique et algébrique (équations, inéquations, relations), *graphique, tabulaire* (tables de valeurs), *dessins ou schémas* (voir tableau 16).

Tableau 16 : Registres de représentation en algèbre

<table>
<tr>
<td>Dessin (schéma)
</td>
<td>Règle, formule, équation, inéquation

y = 3x -5</td>
</tr>
<tr>
<td>Table de valeurs, tableau

<table>
<tr><td>Nombre de personnes</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Coût ($)</td><td>0</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>25</td></tr>
</table>
</td>
<td>Graphique (diagramme)
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Texte (en mots)
Gilles affirme avoir vu des aigles, des corbeaux et des faucons. Il dit qu’il a vu 31 oiseaux durant sa journée. Il y avait 2 faucons de plus que d’aigles et 3 corbeaux de plus que de faucons. Combien de faucons Gilles a-t-il vu ?</td>
</tr>
</table>

Duval (1993) explique que pour avoir accès à un objet mathématique, l’élève doit passer par divers registres de représentation et le conceptualiser par quatre activités cognitives fondamentales : formation, traitement, conversion, coordination. L’activité de formation permet de reconnaître le registre de représentation dans lequel une représentation donnée appartient sans nécessairement le comprendre ni l’utiliser. Par exemple, la consigne peut être d’encercler les termes semblables parmi une série d’expressions algébriques. L’activité de traitement est la transformation d’une représentation en une autre dans le même registre de représentation. L’inférence est une forme de traitement du langage naturel et le calcul est une forme de traitement des écritures symboliques. Cette activité implique la compréhension des règles et conventions qui lui sont propres. Par exemple, pour lire une table de valeurs, l’élève doit savoir que la variable indépendante est toujours à gauche et la variable dépendante à droite, que l’on met en général environ six valeurs et que ces valeurs sont choisies (avec un pas constant pour la variable indépendante pour contrôler la variation de la variable dépendante). Il en serait de même pour le graphique (reconnaître la relation entre deux grandeurs, l’influence de l’une par rapport à l’autre, lire sur l’axe des abscisses, sur l’axe des ordonnées, l’échelle utilisée…). L’activité de conversion est la transformation d’une représentation à un autre registre de représentation. La traduction d’un énoncé en expressions algébriques ou le passage d’une table de valeurs vers le graphique sont des exemples de conversion. Plusieurs recherches montrent que la conversion est l'activité la moins spontanée et la plus difficile à acquérir chez la grande majorité des élèves (Duval, 1993). L'activité de coordination est la capacité à reconnaître dans plusieurs représentations différentes représentations d'un même objet. Cette activité est essentielle, car le travail dans un seul registre de représentation ne suffit pas pour accéder à la compréhension d'un concept. Un élève peut réussir une activité de conversion sans nécessairement effectuer une coordination, car il applique des règles. Duval (1993) indique que seul l'apprentissage fondé sur la coordination entre registres entraîne une compréhension intégrative. Cette activité peut aussi être mesurable par la vitesse d'exécution à changer de registre et par la justification de ce changement.

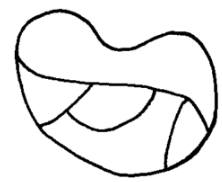
Ainsi, pour juger de la complexité, il faut prendre en considération les registres de représentation qui sont présents dans l'énoncé du problème, mais également leur possible conversion ou coordination lors de la modélisation du problème. Le niveau de complexité lors de la conversion dépend du registre de départ et de celui d'arrivée. Moschkovich (1992) et Yerushalmy, De Serres et Groleau (1997) ainsi que Chazan (2002) considèrent que la représentation sous la forme d'une équation est plus complexe que la représentation sous forme de tableau et sous forme de graphique.

2.2.5 TYPE DE RÉPONSE

Le type de réponse concerne le format de la réponse, le nombre de solutions et la nature de la réponse. Les divers formats de réponse sont : *ouverte*, *fermée, choix multiples, vrai/faux*. À l'aide des taux de réussite des élèves, Sheehan (1997), DeMars (1998) et Sayac et Grapin (2013) indiquent que les réponses à choix multiples sont plus faciles que les réponses élaborées. Il est également plausible de supposer que les questions où les réponses de type vrai/faux sont d'un niveau de complexité bas surtout si aucune justification n'est demandée.

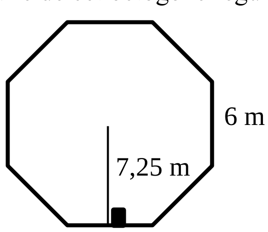
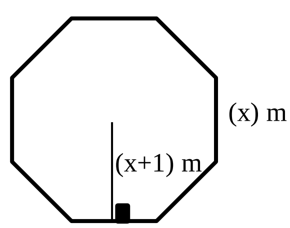
Le MEQ (1988) classe les problèmes selon le nombre de solutions possibles : *une seule solution, un nombre fini de solutions, une infinité de solutions et aucune solution* (voir tableau 17).

Tableau 17 : Exemples de problèmes selon le nombre de solutions (MEQ, 1988)

<u>Une seule solution</u> Les six classes de 5e année d'une école ont chacune formé une équipe de ballon volant. On organise un tournoi où chaque équipe jouera une seule fois contre toutes 1es autres. Combien de parties y aura-t-il dans ce tournoi ?	<u>Aucune solution</u> En utilisant un crayon rouge (R), un bleu (B) et un vert (V), colorie la carte ci-contre de telle sorte que deux régions ayant une frontière commune ne soient pas de la même couleur. 
<u>Nombre infini de solutions</u> Dessine au hasard 2 points sur une feuille. Où peux-tu dessiner le 3e point pour former un triangle isocèle ?	<u>Nombre fini de solutions</u> Trouve tous les montants que 1'on peut former si on dispose de 3 pièces de l ¢, 2 pièces de 5 ¢ et d'une pièce de 10 ¢.

Une autre caractéristique de la réponse est qu'elle peut être de nature numérique ou algébrique (voir tableau 18). Ces réponses de nature algébrique peuvent être source de difficultés chez les élèves à cause du caractère « non achevé » de certaines expressions (Booth, 1988). Pour certains élèves, l'expression algébrique (2x – 1) est porteuse d'une soustraction de termes, donc n'est pas un résultat fini, car il y a encore une opération à réaliser.

Tableau 18 : Problèmes ayant une réponse de nature numérique ou algébrique

Détermine l'aire de cet octogone régulier : 	Détermine l'aire de cet octogone régulier : 
Réponse de nature numérique : $Aire = \frac{nb\ côté\ \times mesure\ côté\ \times apothème}{2}$ $Aire = \frac{8\ \times 6\ \times 7{,}25}{2}$ $Aire =$ 174 m^2	Réponse de nature algébrique : $Aire = \frac{nb\ côté\ \times mesure\ côté\ \times apothème}{2}$ $Aire = \frac{8\ \times (x)\ \times (x+1)}{2}$ $Aire = (64\, x^2 + 8x)$ m^2

2.2.6 ACTIVITÉ COGNITIVE

L'activité cognitive fait référence aux processus cognitifs que l'élève doit mettre en place pour résoudre un problème ou pour répondre à la tâche ou à la question demandée. Ainsi, pendant plusieurs années, les études de l'E.V.A.P.M. (Évaluation des Apprentissages Mathématiques) en France ont utilisé la classification de Gras (1979) pour les tests de référence. Cette taxonomie classe les tâches mathématiques selon la complexité de l'activité cognitive que l'élève doit mettre en œuvre pour résoudre le problème, et ce, dans tous les niveaux scolaires. Elle est spécifique aux mathématiques et hiérarchisée, c'est-à-dire que chaque niveau suppose la maîtrise et la mobilisation des niveaux précédents. Par la suite, Bodin (2004) a adapté cette classification en s'inspirant des travaux de Robert (2003) et d'Anderson et Krathwohl (2001) : *connaissances et reconnaissances, compréhension, application, créativité et jugement*. La catégorie des connaissances et des reconnaissances regroupe des faits, du vocabulaire, des outils des procédures afin d'énoncé, d'identifier, d'appliquer directement, de définir, de reconnaître. La compréhension suppose une analyse et une réflexion pour expliquer, interpréter, mettre en relation, résumer, déduire, justifier. L'application permet d'exécuter, choisir, démontrer dans des problèmes mobilisant plusieurs éléments dans des situations plus ou moins complexes. La créativité fait intervenir l'induction, la généralisation, la modélisation et l'utilisation dans un nouveau problème. Le jugement implique l'évaluation de la qualité d'une argumentation et l'analyse métacognitive (auto-évaluation). La figure 8 illustre la hiérarchisation de cette classification où le niveau *connaissances et reconnaissances* est le plus simple et le niveau *jugement* le plus complexe.

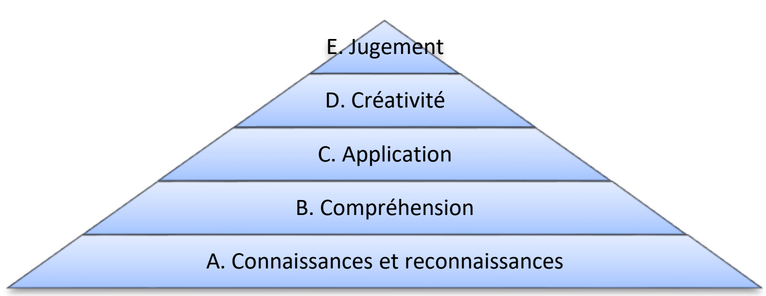


Figure 8 : Classement de l'activité cognitive selon Bodin (2004)

Les études de PISA (OCDE, 2013) distinguent trois processus psycho-cognitifs : *formuler des situations de façon mathématique* (mathématiser les situations de la vie réelle), *employer des concepts,* des faits, des procédures et des raisonnements mathématiques (travailler au sein du modèle mathématique) et *interpréter/évaluer des résultats mathématiques* (mettre un résultat mathématique à l'épreuve dans une situation réelle). Ces processus peuvent être associés à ceux de Bodin (2004) comme le montre la figure 9. À titre d'exemple, le problème de l'ascension du mont Fuji et celui de la pizzeria (voir tableau 19) ont été réussis à 11 % par les élèves (OCDE, 2013).

Tableau 19 : Problèmes issus d'un test PISA

Exemples de problèmes	**Analyse du processus**
Ascension du mont Fuji : La voie Gotemba, qui conduit au sommet du mont Fuji, fait environ 9 kilomètres (km) de long. Les marcheurs doivent être de retour de la randonnée de 18 km pour 20 heures. Toshi estime qu'il peut gravir la montagne à une vitesse moyenne de 1,5 kilomètre/heure, et en redescendre en doublant cette vitesse. Ces vitesses tiennent compte des pauses-repas et des temps de repos. D'après les vitesses estimées par Toshi, à quelle heure au plus tard doit-il commencer sa randonnée afin de pouvoir être de retour pour 20 heures ?	Employer des concepts, des faits, des procédures et des raisonnements mathématiques (calculer la moyenne en convertissant les unités)
Pizzeria : Une pizzeria propose deux pizzas rondes de la même épaisseur, de tailles différentes. La plus petite a un diamètre de 30 cm et coûte 30 zeds. La plus grande a un diamètre de 40 cm et coûte 40 zeds. Laquelle des deux pizzas est la plus avantageuse par son prix ?	Formulation d'un modèle mathématique (aire d'un disque et proportions)

Source : OCDE (2013)

Enright et Sheehan (2002) ont classifié quant à eux les activités cognitives en une *habileté conceptuelle*, une *habileté d'application* ou une *habileté de résolution*. L'habileté conceptuelle fait référence à des concepts spécifiques aux mathématiques où l'élève doit décider de ce qu'il va faire et comment le faire. Ce niveau est lié au niveau *Connaissances et reconnaissances* de Bodin (2004). L'habileté d'application fait appel à des applications d'algorithmes et à des problèmes de routine tandis que ceux se référant à l'habileté de résolution évoquent l'utilisation de l'analyse et du raisonnement. Chacune de ces habiletés peut être liée aux activités cognitives de Bodin (2004) tel que démontré dans la figure 9.

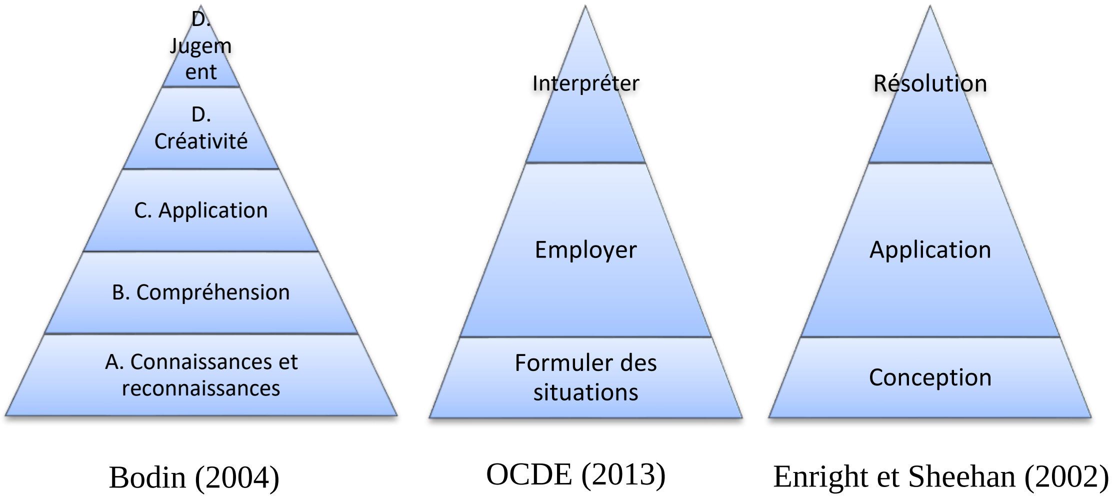


Figure 9 : Classement de l'activité cognitive selon différents auteurs

2.2.7 CONCEPTS PRÉSENTS DANS DIFFÉRENTS CHAMPS MATHÉMATIQUES

Enright et Sheehan (2002), Voyer (2006), Roditi (2007) ainsi que Sayac et Grapin (2013) soulignent que les concepts mathématiques présents dans les problèmes jouent un rôle dans la complexité du problème. Ainsi, un problème portant sur l'algèbre pourrait avoir une complexité différente d'un problème de géométrie. À cet effet, différentes classifications des concepts et processus existent. En France, la classification de EVAPMMIB (Bodin, 2002) se fait par les thèmes suivants : *tracés-constructions géométriques, connaissances et utilisations de théorèmes en géométrie, géométrie analytique, géométrie de l'espace, calcul numérique, calcul littéral (algèbre), proportionnalité et situations affines, aires et volumes, statistiques et probabilités, fonctions et analyse*. Les études de PISA (OCDE, 2013) structurent les contenus autour des thèmes mathématiques : *quantité, variations et relations, incertitude et données, espace et forme*. Selon le PFEQ (MELS, 2006), l'enseignant doit s'assurer que l'élève progresse dans le développement de ses compétences en tenant compte, entre autres, de l'étendue des concepts et des processus à mobiliser dans un ou plusieurs champs mathématiques :

arithmétique, algèbre, probabilité, statistique, géométrie, géométrie analytique, mathématiques discrètes. De plus, un problème comportant plus d'un concept augmente sa complexité. Donc, la combinaison de concepts mathématiques réside dans l'amalgame de concepts prescrits dans le PFEQ (MELS, 2006). Par exemple, un problème demandant de construire une équation algébrique à partir de l'aire d'une figure est considéré plus complexe à résoudre qu'un problème requérant une résolution algébrique standard.

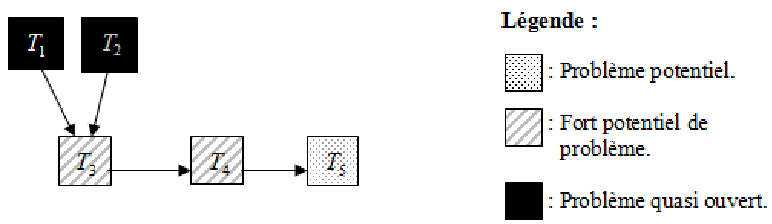
De plus, pour un même champ mathématique, la complexité peut varier selon la nature des nombres en jeu. Ainsi, lors de l'analyse des résultats aux évaluations de NAEP[8], Carpenter *et al.* (1980) et Kouba (1988) rapportent que les élèves sont plus performants dans les problèmes ayant des nombres entiers que des nombres décimaux, des pourcentages ou des fractions. Dans le mémoire de Beaulac (2006), une des erreurs conceptuelles relatées est le type de nombre : « Le fait d'inclure ces nombres [décimaux] permet d'augmenter la complexité des problèmes qui pourraient se résoudre facilement avec des nombres entiers » (p.152). Finalement, Enright et Sheehan (2002) affirment que les problèmes ayant des petits nombres sont plus faciles que ceux ayant de grands nombres.

2.2.8 NOMBRE, NATURE ET ENCHAÎNEMENT DES TÂCHES

Lester (1980) ainsi qu'Enright et Sheehan (2002) ont établi que les problèmes qui exigeaient plusieurs étapes de résolution étaient considérés comme complexes. Le mémoire d'Antoun (2012) s'est réalisé en analysant les problèmes dans les manuels scolaires en se basant sur les travaux de Joannert *et al.* (1990) tel que mentionné dans la problématique :

i) ***bas*** : tâche fermée ou avec un problème potentiel;
ii) ***moyen*** : tâche avec un fort potentiel de problème;
iii) ***élevé*** : tâche qui est un problème;
iv) ***très élevé*** : tâche qui est un problème quasi ouvert.

Le travail d'Antoun (2012) porte un regard *a priori* sur les situations, en amont du traitement de la situation par les élèves, situations présentes dans les manuels scolaires. Elle réalise une schématisation de la situation selon le nombre de tâches à effectuer, la complexité de chaque tâche et l'enchaînement entre ces tâches. La figure 10 présente la schématisation du problème *Les bancs*[9] qui permet de juger de sa complexité.



T_1 : Trouver expression algébrique s'il y a 3 élèves par banc.
T_2 : Trouver expression algébrique s'il y a 10 élèves par banc
T_3 : Mise en égalité des expressions précédentes trouvées en T_1 et T_2
T_4 : Résolution de l'équation trouvée en T_3 pour trouver le nombre de bancs.
T_5 : Substitution dans une des expressions trouvées en T_1 et T_2 pour trouver le nombre d'élèves

Figure 10 : Représentation des tâches d'un problème selon Antoun (2012)

Cette situation comporte cinq tâches, deux qui ont un statut de fort potentiel de problème, deux qui sont des problèmes quasi ouverts et une tâche qui est un problème potentiel. De plus, l'élève doit réaliser les deux tâches de niveau de complexité très élevé dès le début. Ce problème apparaît ainsi d'un haut niveau de complexité.

[8]*The National Assessment of Education Progress* (NAEP) est un programme qui évalue périodiquement les performances des étudiants aux États-Unis en mathématique, en lecture, en écriture et en science.

[9] L'énoncé du problème est dans la problématique au point 1.3.2.

2.3 LIEN ENTRE LES CRITÈRES DE LA RECHERCHE ET LE PROGRAMME

Dans une étude documentaire portant sur l'évolution des programmes québécois de mathématique, Lajoie et Bednarz (2015) précisent que dans le cadre du plus récent programme, la complexité d'un problème s'évalue selon l'étendue des concepts et des processus à mobiliser, le degré de familiarité/degré d'autonomie exigé de l'élève, le nombre de contraintes, le nombre d'étapes à franchir pour résoudre le problème, le niveau d'abstraction nécessaire, la nature des liens intra-mathématiques ou interdisciplinaires.

Le PFEQ (MELS, 2006) précise que : « L'enseignant doit tenir compte d'un certain nombre de paramètres pour, entre autres, nuancer la complexité des situations » (p.30). De plus, « plusieurs paramètres balisant cette progression [développement des compétences] interviennent au regard de la complexité des situations d'apprentissage et d'évaluation qui lui sont présentées » (p.15). Ainsi, cinq paramètres sont communs aux trois compétences :

– le degré de familiarité de l'élève avec le contexte;

– l'étendue des concepts et des processus à mobiliser;

– les passages entre des registres de représentation sémiotique;

– la présence de liens intradisciplinaires ou interdisciplinaires;

– le degré d'autonomie exigé de l'élève.

Il apparaît que ces paramètres sont liés aux critères de complexité issus des recherches. Le paramètre « degré de familiarité de l'élève avec le contexte » fait référence au contexte présenté dans la section 2.2.2. Le critère des concepts mathématiques présenté dans la section 2.2.7 est lié au paramètre « étendue des concepts et processus à mobiliser ». Le paramètre « les passages entre des registres de représentation sémiotique » fait référence au critère des *Registres de représentation* de la section 2.2.4. Les paramètres « présence de liens intradisciplinaires et interdisciplinaires » et « le degré d'autonomie exigé de l'élève » ne sont pas répertoriés comme des critères de complexité pouvant influencer l'énoncé d'un problème algébrique.

De plus, pour chaque compétence, des paramètres caractérisent la complexité d’un problème. Le tableau 20 présente la comparaison entre les paramètres indiqués dans le PFEQ (MELS, 2006) et les critères retenus dans le cadre de cette recherche.

Tableau 20 : Lien entre les paramètres et les critères issus de la recherche

<table>
<tr><th colspan="2">Paramètres (MELS, 2006)</th><th rowspan="2">Critères issus de la recherche</th></tr>
<tr><th>Compétence 1 : Résoudre une situation-problème</th><th>Compétence 2 : Déployer un raisonnement mathématique</th></tr>
<tr><td>Les stratégies à mobiliser pour l’élaboration d’un plan de solution, sa réalisation et sa validation</td><td>Les stratégies à mobiliser dans le déploiement du raisonnement</td><td></td></tr>
<tr><td>Le degré de familiarité de l’élève avec la tâche à accomplir ou les ressources humaines et matériel à mobiliser</td><td>Le degré de familiarité de l’élève avec les types de raisonnement qu’il doit déployer</td><td>Contexte

Activité cognitive</td></tr>
<tr><td>La quantité de contraintes à respecter et de données ou de variables à traiter</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Le niveau d’abstraction exigé de l’élève pour s’approprier la situation</td><td rowspan="2">Le niveau d’abstraction exigé par la représentation mentale et opérationnelle des concepts mobilisés et par les passages entre les différents registres</td><td>Activité cognitive</td></tr>
<tr><td>Les types de registres de représentation sollicités</td><td>Registres de représentation</td></tr>
<tr><td rowspan="3">La nature et la forme du résultat attendu ou potentiel</td><td>L’ampleur des explications ou des justifications requises pour répondre aux intentions de la production demandée</td><td rowspan="3">Type de réponse

Activité cognitive</td></tr>
<tr><td>La portée de la conjecture émise ou à émettre</td></tr>
<tr><td>Le type de preuve sollicitée</td></tr>
<tr><td>La quantité d’étapes à franchir pour élaborer la situation</td><td>La quantité et la nature des étapes à franchir pour parvenir à une validation, à une conclusion ou à la prise d’une décision</td><td>Nombre, nature et enchaînement des tâches</td></tr>
<tr><td>La nature des liens sollicités entre les champs mathématiques ou entre les concepts et processus d’un même champ</td><td rowspan="2">La nature des liens sollicités entre les divers champs mathématiques ou entre les différents réseaux de concepts propre à un champ spécifique</td><td rowspan="2">Concepts présents dans différents champs mathématiques</td></tr>
<tr><td>La spécificité des modèles requis</td></tr>
<tr><td></td><td>L’étendue des données (explicites, implicites ou manquantes) à partir desquelles l’élève doit dégager celles qui sont essentielles, nécessaires ou suffisantes et gérer ses activités</td><td>Type de données fournies dans l’énoncé</td></tr>
</table>

Il est à noter que plusieurs paramètres recensés dans le PFEQ (MELS, 2006) sont corroborés par les recherches comme démontré dans les sections précédentes. Ainsi, le PFEQ (MELS, 2006) et les recherches vont dans le même sens. Par contre, le critère de la structure relationnelle de l’énoncé n’est pas explicite comme étant un paramètre de complexité. Il pourrait être inclus dans le paramètre « la spécificité des modèles requis », mais les paramètres ne sont pas explicités dans le PFEQ (MELS, 2006). Le critère de la structure relationnelle est spécifique au champ mathématique de l'arithmétique et de l'algèbre, ce qui peut expliquer son absence dans les paramètres de complexité généraux du PFEQ (MELS, 2006).

2.4 SYNTHÈSE DES CRITÈRES

La recension des écrits a permis d'identifier et de caractériser huit critères (structure relationnelle, contexte, type de données fournies dans l'énoncé, registres de représentation, type de réponse, activité cognitive, concepts présents dans différents champs mathématiques, nombre, nature et enchaînement des tâches) qui peuvent influencer la complexité de l'énoncé d'un problème écrit en algèbre qui favorise l'utilisation d'un raisonnement analytique. Le tableau 21 permet de synthétiser les huit critères recensés avec les chercheurs qui y sont intéressés.

Tableau 21 : Synthèse des critères de complexité issus de la recherche

<table>
<tr><td rowspan="2">Structure relationnelle</td><td colspan="4">Heller et Greeno,1978; Vergnaud, 1982; Carpenter et Moser, 1982; Riley, Greeno et Heller, 1983
☐ Réunion ☐ Ajout/retrait ☐ Égalisation ☐ Comparaison</td></tr>
<tr><td>☐ Comparaison
(Bednarz et Janvier, 1994)
☐ Nature des relations
☐ Nombre de grandeurs en jeu
☐ Enchaînement des relations</td><td>☐ Taux (Bednarz et Janvier, 1994; Guzman, Bednarz et Hitt, 2003)
☐ Nature des liens
☐ Formulation du taux
☐ Structure du calcul</td><td>☐ Transformation (Bednarz et Janvier, 1994)</td><td>☐ Mise en égalité (Tremblay et Saboya, sous presse)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Contexte</td><td>MEQ (1988)
☐ Réel
☐ Réaliste
☐ Fantaisiste
☐ Purement mathématique</td><td>Cadre (Douady, 1986)
☐ Numérique
☐ Algébrique
☐ Fonctionnel
☐ Géométrique</td><td colspan="2">Murray, Clermont et Binkley (2005)
☐ Vie quotidienne
☐ Travail
☐ Vie sociale
☐ Formation complémentaire</td></tr>
<tr><td>Pocheron (1998)
☐ Situation vécue
☐ Intérieur des mathématiques
☐ Réalité</td><td>Caldwell et Godin (1979, 1987)
☐ Abstrait
☐ Concret
☐ Factuel
☐ Hypothétique</td><td colspan="2">PISA (OCDE, 2013)
☐ Situation personnelle
☐ Sociétale
☐ Professionnelle
☐ Scientifique</td></tr>
<tr><td>Type de données</td><td colspan="4">MEQ (1988)
☐ Complètes
☐ Insuffisantes
☐ Manquantes
☐ Superflues</td></tr>
<tr><td>Registres de représentation</td><td>Duval (1993)
☐ Figures géométriques
☐ Graphes
☐ Écriture symbolique
☐ Langage naturel
☐ Formule algébrique</td><td>Murray, Clermont et Binkley (2005)
☐ Objets et illustrations
☐ Nombres et symboles
☐ Formules
☐ Diagrammes et cartes géographiques
☐ Graphiques
☐ Tableaux
☐ Texte</td><td colspan="2">Registre en algèbre (MELS, 2006)
☐ Schéma (dessin)
☐ Table de valeurs, tableau
☐ Équation, règle, formule
☐ Texte (en mots)
☐ Graphique (diagramme)</td></tr>
<tr><td>Type de réponse</td><td>Format de réponse (DeMars, 1998)
☐ Ouverte
☐ Fermée
☐ Choix multiples
☐ Vrai/faux</td><td>Nombre de solutions (MEQ, 1988)
☐ Une seule solution
☐ Nombre fini de solutions
☐ Infinité de solutions
☐ Aucune solution</td><td colspan="2">Nature de la réponse
☐ Réponse de nature numérique
☐Réponse de nature algébrique (Booth, 1988)</td></tr>
<tr><td>Activité cognitive</td><td>Bodin (2004)
☐ Connaissances et reconnaissances
☐ Compréhension
☐ Application
☐ Créativité
☐ Jugement</td><td>PISA (OCDE, 2013)
☐ Formuler des situations
☐ Employer des concepts
☐ Interpréter/évaluer</td><td colspan="2">Enright et Sheehan (2002)
☐ Habileté conceptuelle
☐ Habileté d'application
☐ Habileté de résolution</td></tr>
<tr><td>Concepts dans différents champs mathématique</td><td>Champs mathématiques
(MELS, 2006)
☐ Arithmétique
☐ Algèbre
☐ Probabilité
☐ Statistique
☐ Géométrie
☐ Géométrie analytique
☐ Mathématiques discrètes</td><td>EVAPMMIB (Bodin, 2002)
☐ Tracés-constructions géométriques
☐ Géométrie et espace
☐ Géométrie analytique
☐ Calcul numérique
☐ Calcul littéral
☐ Proportionnalité et situations affines
☐ Aires et volumes
☐ Statistiques et probabilités
☐ Fonctions et analyse</td><td colspan="2">PISA (OCDE, 2013)
☐ Quantité
☐ Variations et relations
☐ Incertitude et données
☐ Espace et forme</td></tr>
<tr><td>Tâches</td><td colspan="4">Jonnaert, Pallascio et Peltier (1990) ; Antoun (2012)
☐ Nombre de tâches
☐ Complexité de chacune des tâches
☐ Enchaînement entre les différentes tâches</td></tr>
</table>

CHAPITRE 3
MÉTHODOLOGIE

L'approche méthodologique retenue pour cette recherche s'inscrit dans un paradigme interprétatif qualitatif (Savoie-Zajc, 2000). Les objectifs de recherche sont de co-construire une grille d'analyse de critères de complexité des problèmes écrits en algèbre à la croisée de la recherche et de la pratique ainsi que situer ces critères de complexité par rapport à ceux reconnus par la recherche ont guidé le choix de la recherche collaborative. En effet, le désir de travailler de façon conjointe avec les enseignants et d'avoir accès à leur expérience dans le milieu scolaire guide cette recherche.

3.1 RECHERCHE COLLABORATIVE

3.1.1 DESCRIPTION ET FONDEMENTS

La position épistémologique dans laquelle s'inscrit la recherche collaborative est celle qui place le point de vue du praticien au premier plan de la démarche d'investigation. Ce type de recherche se rapproche de l'ethnométhodologie, car pour mieux connaître la réalité des praticiens, la chercheure doit s'allier à la communauté de pratique en participant à son développement pour avancer de façon commune sur l'objet de recherche. La recherche collaborative devient à la fois une activité de recherche et de formation. Ce type de recherche présuppose trois fondements tout au long du processus : 1) une démarche de réflexion dans le but de co-construire des savoirs entre les acteurs concernés, 2) un rapprochement, voire une médiation, entre la communauté de recherche et la communauté de pratique, 3) un critère de double vraisemblance (Desgagné, 1997). Le critère de double vraisemblance est défini comme une double sensibilité à exercer par le chercheur pour faire en sorte que la démarche réflexive soit :

> Tout autant une démarche d'« investigation formelle » qui permet une collecte de données sur un aspect de la pratique, dans le champ qui est le sien, qu'une démarche de « questionnement pratique » pour des enseignants susceptibles de les faire cheminer professionnellement (Desgagné *et al.*, 2001, p.62)

La recherche collaborative s'articule autour de projets dont l'intérêt d'investigation repose sur la compréhension que les praticiens, en interaction avec le chercheur, vont construire autour de l'exploration, en contexte réel, d'un aspect qui concerne leur pratique professionnelle. L'importance du contexte dans lequel évoluent les praticiens est capitale pour bien cerner l'objet de collaboration et la démarche à adopter. Ce processus s'articule entre des temps de réflexion en groupe et des temps d'action où les participants partent de préoccupations issues de leur pratique professionnelle quotidienne, formulent des questions de recherche et tentent de résoudre des problèmes importants pour eux (Bourassa, Leclerc et Fournier, 2010). La réflexion se bâtit à travers les rencontres entre chercheur et praticiens qui permettent de créer une zone interprétative autour de l'objet d'exploration. L'activité réflexive est aménagée pour co-construire un savoir qui peut servir à la double fonction de recherche et de formation où les acteurs s'y engagent sur la base du respect de leurs intérêts et préoccupations tout en se laissant imprégner de la perspective de l'autre communauté.

Selon Desgagné *et al.* (2001), tous les acteurs ont un rôle qui est complémentaire et une expertise qui leur est propre. Chaque partenaire doit s'engager dans cette recherche selon ses compétences, ses préoccupations, les attentes de sa communauté, ses intérêts respectifs et ses structures organisationnelles. Le rôle du chercheur est de baliser et d'orienter la compréhension du contexte qui se construit au fil du projet. Barry *et al.* (2013) expliquent qu'en recherche collaborative, l'enjeu pour le chercheur est d'amener les enseignants à un questionnement pratique et à interagir constructivement avec eux pour avancer ensemble sur un objet commun d'investigation satisfaisant aux besoins émanant du monde de la pratique et de la recherche. Dans l'activité réflexive qui prend place dans cette étude, le rôle de la chercheure se rapproche de celui décrit dans la thèse de Corriveau (2013) : « Mon rôle est de favoriser et d'accompagner l'explicitation des manières de faire, des circonstances qui font que les mathématiques sont faites de cette façon » (p.86). Ainsi, le rôle de cette chercheure dans sa recherche collaborative est de rendre explicite les réflexions des enseignants, de les questionner pour qu'ils précisent leur pensée et reformulent leur discours. De cette façon, la chercheure fait partie du processus de discussion, mais ne voulant pas trop influencer les propos des praticiens, elle joue davantage le rôle d' « interprète de la voix des enseignants » (Corriveau, 2013, p.86). De plus, la chercheure tient compte des besoins des praticiens au fil des rencontres afin de trouver des activités signifiantes qui feront émerger des propos porteurs et des discussions enrichissantes. La chercheure procède donc à une planification globale du déroulement des rencontres est fait et une grande place est laissée aux ajustements. Après chaque rencontre, Corriveau (2013) précise qu'elle se questionne sur la meilleure façon de faire émerger les propos des praticiens en tenant compte de leur évolution, des leurs besoins et de ce qui s'est discuté. En effet, le point de vue du praticien ne peut avoir de sens en faisant fi de la perspective qui permet de reconstruire et d'interpréter les discussions. Dans la recherche collaborative, le praticien est considéré comme un acteur compétent en contexte qui peut faire évoluer son milieu de pratique et qui exerce un contrôle réflexif sur son contexte.

3.1.2 ÉTAPES DE LA RECHERCHE COLLABORATIVE

La recherche collaborative s'articule autour de trois temps pour réfléchir et co-construire un objet d'investigation. Les différentes étapes de la recherche collaborative sont la co-situation, la co-opération et la co-production.

3.1.2.1 ÉTAPE DE CO-SITUATION

À l'étape de la co-situation, les chercheurs et les praticiens se réunissent pour négocier la thématique du projet qui doit avoir du sens à la fois pour les chercheurs et pour les enseignants (Desgagné, 1997). Dans le cadre de cette recherche, le besoin de collaborer avec des enseignants a émergé de la chercheure qui désirait étudier et documenter une problématique observée dans le cadre de ses activités professionnelles de conseillère pédagogique. Comme le projet provient de la chercheure, il est important de réfléchir, avant toute rencontre avec les possibles participants, à la façon de leur présenter pour que ceux-ci se sentent interpellés (Barry *et al.*, 2013). La présentation du projet doit être en lien avec la réalité des enseignants du secondaire pour que ceux-ci soient susceptibles de s'y engager comme participants. Ayant le souci d'interpeller un besoin chez les enseignants afin qu'ils s'engagent dans cette recherche collaborative, l'analyse des résultats lors des épreuves de fin d'année a été mise de l'avant. En effet, des difficultés persistent chez les élèves dans la résolution de problèmes contextualisés faisant intervenir l'algèbre. Ainsi, des discussions avec les enseignants ont permis de dégager différents critères de complexité qui peuvent être présents dans les problèmes en algèbre. Tel que précisé dans la problématique, les enseignants sont capables de se prononcer sur la complexité de problèmes écrits en algèbre de façon implicite selon leur expérience sans être toujours en mesure de formuler clairement les critères de complexité en jeu (par exemple, le nombre d'étapes). Lors de discussions avec différents enseignants, certains ont manifesté un besoin de s'attarder sur ces critères « intuitifs » afin de les nommer de façon claire et précise, d'en cerner les causes et d'en apprendre davantage. Ce projet de recherche qui provient d'une problématique relevée par la chercheure rejoint ainsi la préoccupation des enseignants en mathématique du secondaire qui y voient une occasion de développer leurs compétences professionnelles.

Des enseignants en mathématique intervenant ou ayant intervenu à la deuxième année du premier cycle du secondaire (élèves de 13-14 ans) pendant au moins cinq ans ont été approchés. En effet, après cinq années d'expérience, les enseignants possèdent généralement l'aisance dans le milieu et l'expérience nécessaire pour pouvoir discuter de leur planification, des ajustements et des réflexions qui les ont habités lors de l'enseignement/apprentissage de la résolution de problèmes en algèbre. Ils peuvent ainsi discuter aisément de l'objet d'investigation de cette recherche. Les enseignants qui ont été ciblés sont sensibles à la problématique autour des difficultés d'identification des critères de complexité des problèmes écrits en algèbre, ont exprimé un intérêt pour participer à une recherche collaborative afin de construire en groupe une grille d'analyse agençant divers critères de complexité signifiants pour eux à la croisée de leur pratique et de la recherche.

De plus, ils voyaient les trois rencontres prévues (la rencontre individuelle et les deux rencontres de groupe) comme des moments de réflexion sur leur pratique d'enseignement. Au départ, trois enseignants ont été ciblés afin d'avoir différents points de vue sur des critères pouvant influencer la complexité de problèmes écrits en algèbre. Pour des raisons liées aux contraintes d'horaire, un enseignant s'est désisté. La description des deux enseignants, Éric et Félix, qui ont participé à cette étude est précisée au point 3.3.

Les entrevues individuelles ont permis d'avancer dans la négociation de l'objet de recherche. La réflexion qui a été entamée à ce moment autour de l'objet de recherche s'est poursuivie lors des deux rencontres de groupe afin de répondre aux besoins des enseignants et de la chercheure. En effet, chaque acteur doit prendre en compte la réalité des autres, définir ses objectifs et sensibiliser l'autre à ses enjeux (Desgagné, 1997). Il est essentiel de garder l'équilibre collaboratif au cours du projet entre les deux réalités. Ainsi, l'objet d'investigation a été rediscuté tout au long de la recherche pour arrimer les participants à une finalité commune, ce qui permet un travail collaboratif qui va dans le même sens. Cette appropriation s'est ainsi négociée et régulée dans le temps. De plus, pendant les entrevues individuelles, les modalités de travail ont été discutées. La chercheure a eu le souci de prendre en considération les besoins des enseignants (les retombées bénéfiques pour eux et pour leurs élèves) ainsi que leurs limites (horaire, temps, matériel). Finalement, il a été convenu que la chercheure n'assisterait pas aux cours portant sur la résolution de problèmes en algèbre. En conséquence, la chercheure n'a pas observé en classe les retombées de cette recherche, mais s'intéresse plus particulièrement au travail de co-construction avec les enseignants pendant l'activité réflexive.

Lors de l'entrevue individuelle avec chacun des enseignants, la chercheure a ciblé différents éléments afin d'avoir accès à leur rationnel. Le protocole d'entrevue est précisé au point 3.2.1. Ainsi, l'objet de recherche autour de l'identification des critères de complexité leur a été présenté. Par la suite, les enseignants ont explicité leur vision sur la résolution de problèmes en algèbre et ont précisé leurs motivations à participer au projet de recherche. Ces motivations sont explicitées aux points 3.3.1.1 et 3.3.2.1.

3.1.2.2 ÉTAPE DE CO-OPÉRATION

L'activité réflexive est au cœur de la deuxième étape de la recherche collaborative, la co-opération. Celle-ci permet de capter une pratique en train de se faire et de se dire, un « savoir » en train de se construire (Desgagné, 1997). Les enseignants qui ont participé à cette recherche sont entrés avec la chercheure dans un espace réflexif dans lequel ils ont eu l'occasion de confronter en groupe leurs critères de complexité autour de différents problèmes en algèbre, d'y réfléchir ensemble afin d'arriver à un consensus. Les deux rencontres de groupe ont été un lieu de questionnement et de réflexion pour tous les participants sur l'objet d'investigation dans le but de construire un nouveau savoir, soit une grille d'analyse de critères de complexité à la croisée de la recherche et de la pratique. Ainsi, dans cette recherche, l'activité réflexive a pris forme lors des deux rencontres de groupe autour de l'objet de recherche qui a été co-situé entre les partenaires de la recherche collaborative. Pour susciter la discussion lors de la première rencontre de groupe, différentes activités ont été prévues. Chaque enseignant était responsable de partager des problèmes écrits en algèbre qu'il jugeait complexes. De son côté, la chercheure avait apporté les problèmes provenant d'un test écrit administré à des élèves de 2^{e} année du secondaire, accompagnés du taux de réussite à chacun des problèmes et des raisonnements ressortis. Finalement, la chercheure souhaitait partager des problèmes issus d'une recherche (Saboya *et al.,* 2013) qui s'attarde aux problèmes impliquant des relations de comparaison. À la suite de cette première rencontre, la chercheure a relevé chaque critère de complexité évoqué lors de l'activité réflexive. Lors de la deuxième rencontre, la chercheure a remis aux enseignants des bouts de papier où étaient retranscrits les critères évoqués de complexité et a proposé que chacun des participants classe ou regroupe ces critères en grandes catégories. Cette activité a permis de co-construire une grille d'analyse de la complexité des problèmes en algèbre et celle-ci a été opérationnalisée avec de nouveaux problèmes. Les différentes activités proposées lors de ces deux rencontres sont reprises au point 3.2.3. L'activité réflexive mise en place a permis des échanges enrichissants, des remises en question dans lesquels l'ouverture d'esprit, le respect et l'écoute étaient présents.

3.1.2.3 ÉTAPE DE CO-PRODUCTION

L’étape de co-production est le temps où le chercheur collaboratif mène l’analyse de manière à prendre en compte la voix des participants à la recherche pour une « double fécondité des résultats » (Barry *et al.*, 2013). C’est le moment où des connaissances pour la recherche et d’autres pour le milieu de la pratique sont produites (Desgagné, 1997). Cette recherche permet aux praticiens d’avoir en main une grille d’analyse pour étudier et rendre compte de la complexité des problèmes visant l’expression d’un raisonnement analytique dans les différentes ressources mises à leur disposition comme les manuels scolaires. Cette grille permet également aux enseignants de planifier une séquence de problèmes écrits variés en algèbre qui prend en considération une gradation de leur complexité. Les retombées espérées touchent à la fois les enseignants à travers un sentiment de confiance sur l’explicitation de leur analyse des problèmes à proposer aux élèves et sur l’apprentissage des élèves. Par ailleurs, la communauté scientifique bénéficie d’une grille d’analyse présentant des critères pouvant influencer la complexité de problèmes algébriques qui a été construite à la croisée de la recherche et de la pratique. Le point de vue des enseignants sur les critères de complexité qu’ils reconnaissent permet de mieux cerner le sens qu’ils y accordent dans leur pratique. Le tableau 22 présente les éléments du projet de recherche qui colorent les différentes étapes de cette recherche collaborative.

Tableau 22 : Activités prévues de la présente recherche collaborative

<table>
<tr><th>Co-situation</th><th>Co-opération</th><th>Co-production</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Entente sur l’objet d’investigation à travers des entrevues individuelles semi-dirigées : la co-construction d’une grille d’analyse présentant les critères pouvant influencer la complexité des problèmes écrits en algèbre.</td><td rowspan="2">Activité réflexive autour de la complexité de problèmes en algèbre qui s’appuie sur i) des problèmes rapportés par les enseignants et qu’ils jugent complexes d’après leur expérience; ii) des résultats de recherche sur des problèmes ayant des relations de comparaison qui rapportent des critères de complexité, des raisonnements d’élèves et des taux de réussite; iii) des problèmes provenant d’un test écrit distribué par la chercheure à des élèves de 2e secondaire accompagné du taux de réussite et des raisonnements ressortis.
Deux rencontres de groupe ont été menées.</td><td>Retombées dans la communauté de pratique :
- conception d’une grille d’analyse co-construite entre enseignants et chercheure autour des critères pouvant influencer la complexité de problèmes écrits en algèbre;
- utilisation de cette grille dans l’analyse de problèmes provenant de différentes sources et prise en compte des critères de complexité dans l’élaboration d’une séquence de problèmes algébriques graduée en complexité;
- des retombées sur l’apprentissage des élèves.</td></tr>
<tr><td>Retombées dans la communauté de recherche :
- conception d’une grille d’analyse co-construite entre enseignants et chercheure autour des critères pouvant influencer la complexité des problèmes en algèbre;
- compréhension du point de vue des enseignants sur la complexité des problèmes permet de dégager des critères reconnus par les praticiens et leur formulation.</td></tr>
</table>

3.2 OUTILS DE COLLECTE ET TRAITEMENT DES DONNÉES

Les différents outils de collecte de données (entrevue individuelle, test écrit auprès des élèves, rencontres de groupe) et les différentes sources de données (enseignants, élèves) permettent d'assurer, par le biais d'une triangulation, une crédibilité et une validité à la recherche. Un certificat d'éthique a été délivré pour la présente recherche dont le numéro est le CÉR-84-576. Les résultats de cette recherche sont transférables à la fois dans les milieux de pratique et de recherche. La collecte de données permet d'analyser le processus qui a mené à la construction conjointe d'une grille d'analyse combinant les critères de complexité retenus dans les problèmes algébriques ce qui garantit la fiabilité de cette recherche. Les données produites sont objectives dans la mesure où elles respectent les conventions établies, donc cette étude est confirmée. Deux enseignants, Éric et Félix, ont pris part à cette recherche. Tel que précisé dans la section précédente, ils ont participé à une entrevue individuelle et à deux entrevues de groupe. Pour alimenter les discussions lors des rencontres de groupe, un test écrit portant sur six problèmes pouvant être résolus algébriquement a été élaboré à la lumière du cadre conceptuel et soumis à des élèves de deuxième secondaire (voir annexe I)[10]. La chercheure a rapporté aux enseignants les taux de réussite pour chacun de ces problèmes ainsi que des raisonnements d'élèves. Elle a également présenté un article de recherche qui s'attarde sur les problèmes impliquant des relations de comparaison (Saboya *et al.*, 2013). Le tableau 23 rapporte les différentes phases de l'expérimentation de la présente recherche qui sont décrites sous forme de calendrier. Ces phases de l'expérimentation teintent les trois étapes de la recherche collaborative, la co-situation, la co-opération et la co-production.

---

[10]La construction de ce questionnaire est détaillée au point 3.2.2.

Tableau 23 : Calendrier du déroulement de l'expérimentation

Phase	Date
1) Préparation du questionnaire écrit destiné à des élèves de deuxième secondaire	Hiver 2015
2) Administration du questionnaire dans trois classes de deuxième secondaire	Mai 2015 Durée : 75 min
3) Analyse des productions d'élèves et sélection de certaines copies selon des critères précis en vue d'animer la discussion de groupe avec les deux enseignants	Été 2015
4) Préparation du protocole pour l'entrevue individualisée	Septembre 2015
5) Entrevue individualisée avec chaque participant	Le 10 et le 16 novembre 2015 Durée : 1 heure lors d'une période libre à leur école
6) Pour chacune des entrevues, compilation des critères de complexité qui ressortent pour chacun des enseignants afin d'alimenter la discussion lors de la première rencontre de groupe	Novembre 2015 Après chaque entrevue individualisée
7) Première rencontre de groupe avec les deux participants	20 novembre 2015
8) Recompilation/synthèse des critères de complexité évoqués par les participants qui servira de tremplin lors des discussions dans la deuxième rencontre de groupe	Fin novembre et début décembre 2015
9) Deuxième rencontre de groupe avec les deux participants	7 décembre 2015
10) Analyse des catégories évoquées lors de la co-construction de la grille d'analyse	Hiver 2016

3.2.1 ENTREVUE INDIVIDUELLE

Afin d'établir un premier contact avec les participants de la recherche, la collecte de données a débuté par une entrevue individuelle semi-dirigée d'une durée d'environ une heure avec chaque enseignant, qui a eu lieu respectivement le 10 et le 16 novembre 2015. Poupart (1997) décrit l'entrevue comme « l'un des meilleurs moyens pour saisir le sens que les acteurs donnent à leurs conduites, la façon dont ils se représentent le monde et la façon dont ils vivent leur situation » (p.175). De plus, l'entrevue semi-dirigée permet « d'établir une interaction humaine et sociale dense avec chacune des personnes » (Gauthier, 2003, p.298). Ce dernier rapporte que les quatre buts de l'entrevue semi-dirigée sont de rendre explicite l'univers de l'autre, de comprendre le monde de l'autre, d'apprendre mutuellement l'un de l'autre et de s'émanciper. Cet outil de collecte de données permet un accès privilégié aux savoirs déclarés des enseignants, car ils expriment leur pratique d'enseignement en classe selon leur point de vue. Ainsi, le rationnel des enseignants est exposé pour comprendre les référents qui les guident dans la construction de la séquence d’enseignement. L’entrevue individuelle avec chaque enseignant a pour but de leur présenter le projet, de leur faire connaître les implications futures et de recueillir leurs propos sur l’objet de la recherche. Le canevas d’entrevue individuelle semi-dirigée de cette recherche (voir annexe III) questionne l’expérience de l’enseignant, les motivations à participer à ce projet, la planification globale en algèbre, leurs méthodes d’enseignement, les ressources qu’ils utilisent, les difficultés constatées chez leurs élèves et les critères qui leur permettent de juger de la complexité des problèmes écrits en algèbre. Pour respecter leur horaire, cette entrevue filmée s’est déroulée lors d’une période libre déterminée par chacun des participants. Au moment de ces rencontres, l’enseignement de l’algèbre avait déjà été amorcé en classe.

Le verbatim de chacune de ces rencontres a permis d’analyser les propos des enseignants. Les critères de complexité dégagés ont été relevés en reprenant les termes employés par les enseignants. Ces critères ont teinté les rencontres de groupe et ont été à la base de la construction d’une grille d’analyse de complexité des problèmes.

3.2.2 TEST ÉCRIT AUPRÈS DES ÉLÈVES

Un test écrit de 75 minutes a été distribué à des élèves de deuxième année du secondaire en mai 2015, donc avant les rencontres avec les deux enseignants. À ce moment de l’année, les élèves avaient finalisé l’étude des concepts et des processus prescrits en algèbre. Bien que cela aurait été pertinent, ce test n’a pas pu être administré dans les classes des enseignants participants à cette recherche, car les rencontres étaient planifiées en début d’année. En effet, les rencontres avec les deux enseignants ayant été prévues en début d’année scolaire, les enseignants n’avaient pas encore vu avec leurs élèves la résolution de problèmes en algèbre, donc ces derniers n’auraient pas été en mesure de résoudre les problèmes proposés dans le test écrit. C’est pour ces raisons que le test écrit a été distribué à des élèves de trois classes de deuxième secondaire. Trois classes ont été visées afin d’avoir le nombre nécessaire d’élèves pour que nos données soient significatives. Les enseignants de ces trois classes se sont portés volontaires pour passer ce test à leurs élèves.

Le test comporte six problèmes[11] écrits (voir annexe I) et vise la manifestation de raisonnements analytiques. Les problèmes sont construits afin de mettre en lumière essentiellement deux critères de complexité recensés dans les recherches : la structure relationnelle de l'énoncé (Bednarz et Janvier, 1994) et le type de données (MEQ, 1988). L'intention est de menée une discussion sur ces deux critères, mais surtout sur la structure relationnelle de l'énoncé qui, d'après l'expérience de la chercheure comme conseillère pédagogique, est souvent opaque pour les enseignants. Ainsi, le nombre de critères visé dans ce test est restreint pour concentrer l'attention des enseignants sur ces critères et ne pas égarer la discussion sur d'autres critères de complexité. Les structures relationnelles évoquées dans le cadre théorique ont été considérées pour construire des problèmes déconnectés impliquant des relations de comparaison, des taux, de la transformation ou de la mise en égalité. Le type de données (MEQ, 1988) est le deuxième critère de complexité retenu, car ce critère est souvent explicité par les enseignants. Dans ce test, aucun problème ne comporte de données manquantes ou insuffisantes. Un seul problème présente une donnée superflue. L'activité cognitive est sensiblement la même pour chaque problème, soit l'application selon Bodin (2004). Dans les registres de représentation, tous les problèmes sont sous forme de texte, car le registre textuel est celui qui est le plus courant dans les manuels et le plus souvent utilisé par les enseignants en résolution de problèmes. De plus, tous les contextes sont familiers pour les élèves pour qu'ils puissent facilement s'engager dans le problème. Le nombre de tâches est similaire d'un problème à l'autre et varie entre quatre et six. En plus, les concepts mathématiques utilisés dans les problèmes relèvent de l'algèbre et de l'arithmétique et ne font intervenir ni la géométrie, ni la probabilité, ni la statistique. La grandeur des nombres en jeu est semblable d'un problème à l'autre, soit des nombres naturels inférieurs à 150 afin de faciliter les calculs auprès des élèves. Finalement, chaque problème possède une réponse unique possible et elle est de nature numérique, car c'est le type de réponse le plus répandu dans les classes. Le tableau 24 fait une synthèse des critères de complexité utilisés dans chacune des questions du test écrit.

---

[11] Les problèmes sont inspirés d'un document élaboré par les commissions scolaires de la Montérégie. (Disponible en ligne à : http://vitrine.educationmonteregie.qc.ca/spip.php?article1325)

Tableau 24 : Synthèse des critères de complexité des problèmes du test écrit

	STRUCTURE RELATIONNELLE					TYPE DE DONNÉES	
Nom du problème	Réunion	Comparaison	Taux	Transformation	Mise en égalité	Donnée complète	Donnée superflue
Musique			x		x	x	x (7 minutes)
Parc d'amusement	x		x	x		x	
Souvenirs		x (puits)				x	
Coquillages		x (composition)				x	
Destination de vacances			x	x	x	x	
Argent de poche	x			x		x	

Afin d'analyser les copies des élèves, un formulaire de consentement a été distribué aux parents. Ainsi, sur les 75 élèves, 25 formulaires de consentement signés ont été recueillis. Ces copies d'élèves ont servi à des fins d'analyse sommaire pour déterminer les difficultés, les erreurs, les raisonnements utilisés, les stratégies de résolution et le taux de réussite de chaque problème (voir annexe II). Ces analyses ont permis d'enrichir les discussions lors de la première rencontre de groupe.

3.2.3 RENCONTRES DE GROUPE

La collecte de données s'est poursuivie par le biais de deux rencontres de groupe impliquant les deux enseignants et la chercheure. L'activité réflexive mise en place vise à dégager des critères de complexité de problèmes écrits en algèbre afin de construire conjointement une grille d'analyse permettant d'analyser les problèmes. Chaque rencontre était d'une durée d'environ deux heures et trente minutes. Deslauriers (1991) souligne que le groupe a permis aux enseignants de réfléchir ensemble, de se rappeler des choses oubliées et de modifier leur jugement ou de donner une opinion plus nuancée. Au moment de ces rencontres, Félix avait amorcé avec ses élèves la résolution de problèmes algébriques ainsi que la manipulation algébrique. Il avait ainsi des exemples récents en tête de ce que ses élèves avaient produit ainsi que des problèmes étudiés en classe. Éric intervient en 2^e^

année du secondaire en tant qu'enseignant-ressource, c'est-à-dire un enseignant qui soutient les apprentissages des élèves en difficulté dans la classe d'un autre enseignant. Ces élèves aussi avaient commencé à aborder la résolution de problèmes en algèbre.

3.2.3.1 PREMIÈRE RENCONTRE DE GROUPE

Le 20 novembre 2015, lors de la première rencontre filmée en groupe, l'objectif était de faire émerger des critères de complexité que les enseignants trouvaient pertinents. Différentes activités étaient prévues dans cette rencontre de groupe. Premièrement, il avait été demandé aux enseignants d'apporter des problèmes qu'ils jugent complexes (voir annexe V) et d'en expliciter les raisons. À ce stade, la chercheure a posé des questions d'éclaircissement pour mieux comprendre les critères de complexité reconnus par les enseignants. Un titre à chacun des problèmes pour en faciliter la référence. Le tableau 25 présente la structure relationnelle de chacun de ces problèmes.

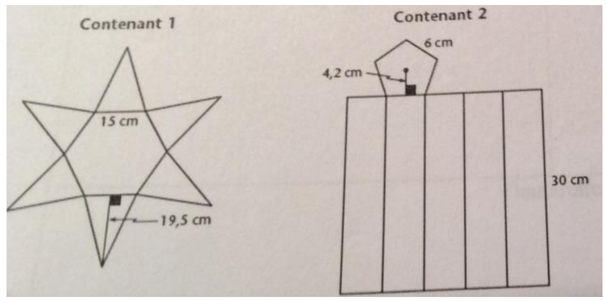
Tableau 25 : Structure relationnelle des problèmes apportés par les enseignants

Source	Nom du problème	Réunion	Comparaison	Taux	Transformation	Mise en égalité
Problèmes apportés par Éric	*Aire des cheveux**					
	*Cinéma**			x		
	*Clôture du 400ᵉ**			x		
	*Logo d'une compagnie**	x		x		
Problèmes apportés par Félix	*Âge*		x		x	
	Collection de monnaie		x (source)			x
	Croissance d'une plante			x		
	Fenêtres	x				
	Football	x				
	Poseur de céramique			x		
	Vélo		x (composition)			
	Trouver un nombre	x				

*Ces problèmes font appel aussi à des concepts géométriques.

Notons que d'autres critères de complexité entrent en jeu dans ces problèmes outre la prise en compte de leur structure relationnelle. Prenons l'exemple du problème *Cinéma* :

Un propriétaire de cinéma se demande quel contenant de maïs soufflé il devrait choisir pour minimiser ses dépenses. Les contenants sont de formes différentes. Le contenant de maïs soufflé 1 a la forme d'une pyramide régulière à base hexagonale et le contenant 2, celle d'un prisme régulier à base pentagonale. Le contenant 1 sera fait de plastique recyclé. Ce plastique est vendu au décimètre carré uniquement. Chaque décimètre carré coûte 0,04 $.



Le contenant 2 sera fait de carton. Le prix du carton est proportionnel à sa superficie. Voici quelques exemples de prix :

Superficie (m^2)	4	7
Prix ($)	11,60	20,30

Pour aider le propriétaire du cinéma à faire son choix, détermine le prix de chacun des contenants (arrondis tes réponses finales aux centièmes).

Dans ce problème, les registres de représentation sont les mots, la table de valeurs et le dessin. Le contexte est de type réaliste selon la classification du MEQ (1988) faisant intervenir un cadre fonctionnel et géométrique (Douady, 1986). Les concepts en jeu dans ce problème sont l'aire de polygones réguliers, la situation de proportionnalité et le taux. Selon la classification de Bodin (2004), ce problème fait intervenir le niveau de l'application puisqu'il demande de déterminer un prix, donc l'exécution des concepts et processus requis. Il y a une seule réponse possible sous la forme fermée, c'est-à-dire une courte réponse, et elle est de nature numérique. Toutes les données de ce problème sont complètes, donc toutes les informations nécessaires à sa résolution. Il n'y a pas de données manquantes, insuffisantes ou superflues (MEQ, 1988). Les étapes requises pour résoudre ce problème sont : déterminer l'aire du contenant 1, déterminer le coût de fabrication du contenant 1 (étape interdépendante de l'étape de l'aire), déterminer l'aire du contenant 2, déterminer le coût de fabrication du contenant 2 (étape interdépendante de l'étape de l'aire) et choisir le contenant ayant le coût le moins élevé. Ainsi, cinq étapes sont nécessaires et elles sont toutes de niveau bas selon la grille d'analyse d'Antoun (2012). L'analyse plus détaillée de chacun des problèmes est traitée au chapitre IV en même temps que l'activité réflexive faite avec les enseignants.

De plus, lors de cette première rencontre et comme base de discussion, la chercheure a nommé les critères évoqués par les enseignants lors des rencontres individuelles. L'intention était de mieux comprendre ce que les enseignants entendaient pour chacun des critères de complexité évoqués, il ne s'agissait pas pour la chercheure de statuer sur la validité de ces critères, mais plutôt d'éclairer le rationnel des enseignants et d'arriver en groupe à un consensus, à des reformulations voire à des réfutations de certains critères. Une troisième activité qui a pris place dans la première rencontre de groupe a été la présentation du test écrit qui avait été soumis à trois classes d'élèves de deuxième année du secondaire. Il leur a été demandé de classer individuellement ces problèmes en ordre de complexité. Une discussion entre les participants par la suite a permis d'argumenter autour des critères expliquant l'ordre établi par chacun. L'objectif de cette activité était de valider et/ou de nuancer les critères de complexité ressortis lors des deux premières activités énoncés, de les reformuler, de les enrichir ou de nommer de nouveaux critères de complexité. Pendant la discussion, la chercheure a présenté aux deux enseignants des copies d'élèves sélectionnées à des fins d'analyse (voir annexe II). Ces copies et le taux de réussite de chacun des problèmes ont permis de peaufiner certains critères de complexité ressortis précédemment. Dans une quatrième et dernière activité, les enseignants ont effectué un classement en ordre de complexité des problèmes (voir annexe VI) provenant de la recherche menée par Saboya *et al.* (2013). L'intention de cette activité est d'amener les enseignants à s'intéresser à la structure relationnelle des énoncés, un critère de complexité qui, comme précisé précédemment, semble méconnu par les enseignants. Les problèmes sélectionnés dans la recherche de Saboya *et al.* (2013) sont des problèmes impliquant des relations de comparaison et ayant des enchaînements différents entre les relations de comparaison en jeu (source, composition et puits). Pour cette dernière activité, la chercheure a procédé à une courte présentation pour exposer aux enseignants ce que dit la recherche sur la complexité des problèmes écrits en algèbre concernant la *Structure relationnelle*. Une discussion animée par la chercheure a pris place pour rendre explicite la structure relationnelle de chacun des problèmes présentés depuis le début de la rencontre. Le but était de comparer leurs critères de complexité retenus à la suite des discussions avec ceux rapportés par les recherches afin de bonifier leurs critères. Ainsi, à travers ces quatre activités, les participants ont procédé à une i) reformulation des critères de complexité énoncés individuellement et en groupe, ii) discussion autour des problèmes choisis par les enseignants en ressortant les raisons de leur choix basé sur la complexité de chacun de ces problèmes, iii) confrontation entre le classement des problèmes fait par les enseignants et le classement qui émerge des taux de réussite des élèves. Ces activités ont permis l'émergence de critères de complexité entre les participants de cette recherche.

À la suite de cette première rencontre de groupe qui était enregistrée, la chercheure a identifié les critères de complexité sur lesquels le groupe avait statué et qui rendaient compte du rationnel des participants. Le verbatim de cette première rencontre de groupe a permis la codification des données afin de faire émerger des catégories de sens (Blais et Martineau, 2006). Un travail est alors fait en vue, d'une part, de rendre apparents les critères évoqués aux enseignants et, d'autre part, de valider si ces critères sont effectivement considérés comme des éléments à retenir lors de l'analyse de la complexité des problèmes pour les enseignants. Pour engager le travail de co-construction d'une grille d'analyse regroupant des critères de complexité, la chercheure a ressorti à la fois les critères évoqués par les enseignants lors de la rencontre en groupe et ceux qui ont été nommés en entrevue individuelle et non discutés lors de la rencontre de groupe. Chaque critère a été écrit sur un bout de papier (voir annexe VII). Ces 30 critères sont des phrases ou des groupes de mots pris directement dans les verbatims de ces rencontres. La chercheure a par la suite procédé à un regroupement de ces critères évoqués essentiellement par les enseignants en catégories (voir annexe XI). Ce travail visait à ce que la chercheure prépare une discussion avec les participants lors de la deuxième rencontre de groupe pour co-construire une grille d'analyse autour des critères de complexité de problèmes en algèbre qui avaient émergé jusque-là. De plus, une réflexion a été menée par la chercheure sur le potentiel des activités prévues lors de la première rencontre de groupe : est-ce que les problèmes discutés, ceux apportés par les enseignants, ceux du test écrit et ceux de la recherche de Saboya *et al.* (2013) étaient représentatifs de la variété des problèmes présentés habituellement aux élèves ? Ayant le souci de faire émerger d'autres critères de complexité par les enseignants, la chercheure a sélectionné de nouveaux problèmes. Les nouveaux problèmes sélectionnés par la chercheure visaient ainsi à mettre l'accent sur de critères de complexité que les enseignants n'avaient pas mentionnés lors de l'entrevue individuelle ou de la première rencontre de groupe.

3.2.3.2 Deuxième rencontre de groupe

Le 7 décembre 2015, lors la deuxième rencontre filmée, la rencontre comportait des activités permettant de co-construire une grille d'analyse et de l'opérationnaliser avec de nouveaux problèmes apportés par la chercheure. Pour faire émerger des catégories de sens, chaque enseignant a reçu au début de la rencontre une enveloppe contenant des bouts de papier. Sur chaque papier était indiqué un critère de complexité évoqué depuis le début de la recherche (voir annexe VII). Ils ont eu la consigne de regrouper individuellement les critères en grandes catégories selon leurs propres critères (exercice auquel s'était également soumise la chercheure après la première rencontre de groupe tel que précisé dans la section précédente). Par la suite, chacun a partagé et expliqué son classement (voir annexes IX, X, XI). Finalement, une discussion autour des différentes catégories créées a fait émerger un classement commun, co-construit entre les participants de la recherche (annexe XII). Pour valider ce classement, la chercheure a proposé de nouveaux problèmes (voir annexe XIII) qui ont été sélectionnés, tel que précisé précédemment, après analyse par la chercheure, des critères ressortis lors de la première rencontre de groupe. L'intention de procéder à une analyse de ces problèmes était d'une part d'opérationnaliser la grille d'analyse co-construite et d'autre part de la réajuster et de rajouter certains critères de complexité si nécessaire. Les nouveaux problèmes ont été choisis afin d'être représentatifs d'une plus grande diversité. Ainsi, le problème *À la ferme* possède des données implicites (le nombre de pattes des poules et le nombre de pattes des chevaux) et dans le problème *Enfants malades* il y a une donnée superflue (Eugénie a 7 ans). De plus, les problèmes *Enclos*, *Vente d'ordinateurs* et *Flamme olympique* ont d'autres registres de représentation que celui des mots (graphique, table de valeurs, dessin). Les problèmes *Saut de kangourou* et *Fromage* ont des énoncés courts, mais la compréhension n'est pas évidente à la première lecture. Le problème *Réservoirs* est un problème connecté impliquant des taux. Le tableau 26 présente la structure relationnelle des nouveaux problèmes présentés aux enseignants.

Tableau 26 : Structure relationnelle des nouveaux problèmes

Nom du problème	**Réunion**	**Comparaison**	**Taux**	**Transformation**	**Mise en égalité**
Saut du kangourou			x		
À la ferme					x
Enfants malades	x	x	x		
*Enclos**	x				
Fromage			x		
Réservoirs			x		x
Vente d'ordinateurs			x		x
Flamme olympique			x		

*Problèmes faisant appel à des concepts géométriques

Les problèmes ont été sélectionnés d'après leur structure relationnelle, c'est le critère de complexité que la chercheure souhaitait voir émerger chez les enseignants. À la suite de l'analyse la structure relationnelle des énoncés des problèmes de l'article Saboya *et al.* (2013) lors de la première rencontre de groupe, les enseignants ne reconnaissent pas le plein potentiel de ce critère de complexité : reconnaître les différents types de problèmes et à l'intérieur de chacun de ces problèmes, les éléments de complexité qui s'y rattachent.

À la suite de cette deuxième rencontre de groupe, un verbatim a été écrit et un codage de sens a été fait (Blais et Martineau, 2006) pour mieux analyser les propos des participants. La figure 11 représente les différentes étapes du processus visant la co-construction d'une grille d'analyse permettant de juger de la complexité des problèmes écrits en algèbre.

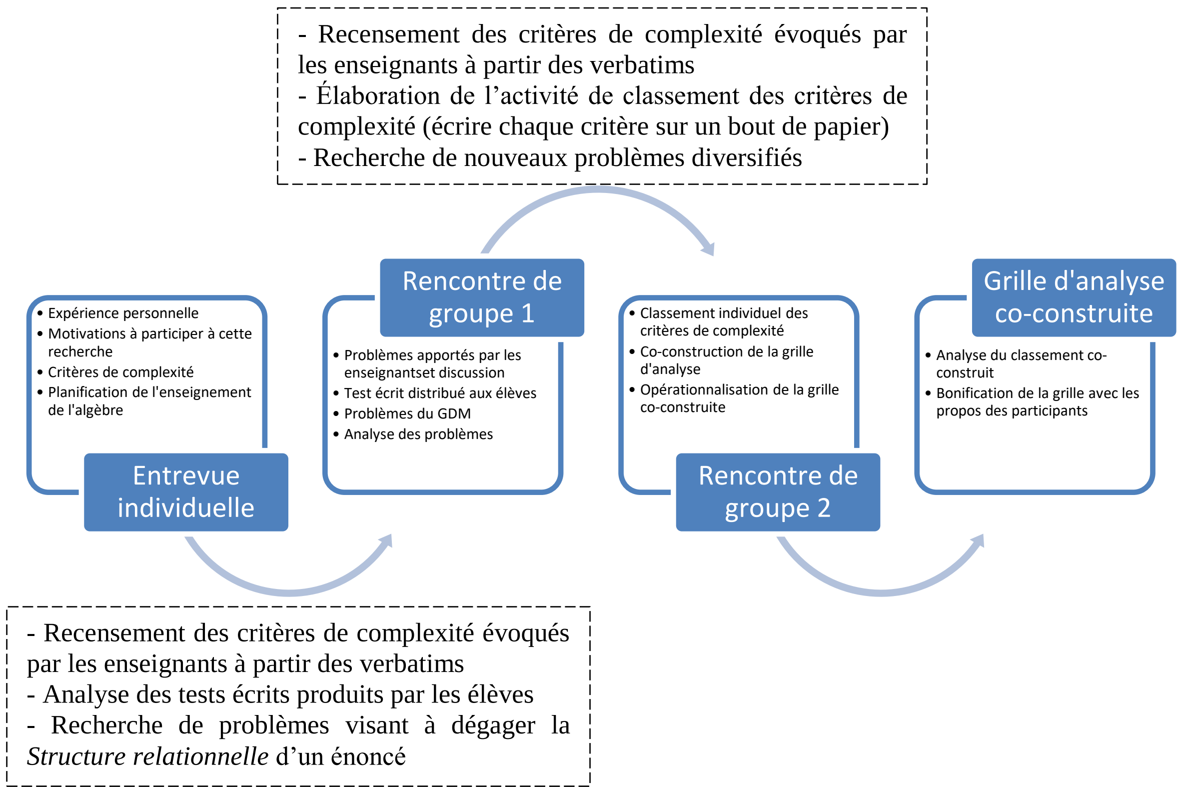


Figure 11 : Processus de la présente recherche collaborative

3.3 PRÉSENTATION DES PARTICIPANTS

Les deux participants à cette recherche, Félix et Éric[12], sont des enseignants qui ont démontré un intérêt vis-à-vis l'objet de cette recherche et qui sont désireux de prendre part à des rencontres réflexives autour des critères pouvant influencer la complexité de problèmes en algèbre. Ces deux enseignants travaillent dans la même commission scolaire dans la région de Québec, mais dans des écoles différentes. Ils se connaissent depuis quelques années et ont déjà collaboré sur des projets communs. L'entrevue semi-dirigée menée avec Éric et Félix permet d'en savoir plus sur différents aspects : 1) leur motivation

[12] Ces deux noms sont des noms fictifs.

à participer à ce projet, 2) la planification de leur enseignement sur le chapitre portant sur l'algèbre et dans laquelle prend place la résolution de problèmes, 3) leurs critères de complexité[13].

3.3.1 PRÉSENTATION D'ÉRIC

Éric est un enseignant possédant deux baccalauréats, un en littérature française et un deuxième en enseignement secondaire en mathématique et en français. Il est enseignant depuis quatorze ans dont huit ans en mathématique au niveau de la 2e année du secondaire dans des classes régulières. Au moment de l'entrevue, il n'enseignait plus en 2e année du secondaire depuis deux ans, mais il intervient comme enseignant-ressource à ce niveau scolaire. Il n'a jamais enseigné le français langue maternelle.

3.3.1.1 MOTIF DE SON ENGAGEMENT DANS LA RECHERCHE

La principale raison d'Éric de s'engager dans cette recherche est le désir d'aider la chercheure à mener à terme son mémoire de maîtrise. Il précise qu'il pense pouvoir apporter son expérience autour de l'enseignement de l'algèbre.

> Bien tout simplement que tu me l'as demandé puis visiblement j'ai sûrement des connaissances. Disons que j'ai de l'expérience avec les élèves de secondaire 2, de bonnes connaissances du programme et des difficultés que tous les jeunes de 2 [2e secondaire] rencontrent particulièrement en algèbre en secondaire 2 là où on l'introduit (RIE, p.2, lignes 76-79[14]).

[13] Les critères de complexité relevés par Éric et Félix sont explicités à la section 4.1.

[14] RIE signifie que cette citation est tirée du verbatim de la *Rencontre individuelle d'Éric*. Afin de ne pas alourdir inutilement le texte, les nombres qui sont présentés après la page correspondent aux lignes du verbatim.

À ce stade, il ne semble pas attendre de son implication dans cette recherche un apport possible dans son enseignement. Il est en mode transmission et ne perçoit pas les retombées d'une recherche collaborative. Par contre, les visées d'Éric se modifient au cours des trois rencontres réflexives et sont discutées au chapitre V.

3.3.1.2 PLANIFICATION DE SON ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE

Éric amorçait l'enseignement de l'algèbre dès la première étape de l'année scolaire. Le manuel scolaire *Panoramath* (Cadieux, Gendron et Ledoux, 2005) et des cahiers de notes de cours sont les documents de référence pour les élèves. L'utilisation de la technologie n'était pas mise de l'avant dû à un manque de temps et de matériel. Par contre, il se référait souvent PFEQ (MELS, 2006) pour valider les apprentissages suggérés dans le manuel scolaire. Dans le manuel scolaire, l'algèbre est divisée en deux chapitres non consécutifs, mais Éric les jumelait en un seul. Ce chapitre traitant de l'algèbre était travaillé jusqu'au début du mois de novembre ce qui lui permettait par la suite de le réinvestir dans l'apprentissage des autres concepts mathématiques durant l'année comme le cercle et les proportions. Une autre raison pour laquelle Éric débutait son année avec ce chapitre est pour ne pas donner « un faux sentiment de facilité aux élèves » (RIE, p.4, 190-191), car l'algèbre est considérée difficile par les élèves selon lui. Il explique que le passage de l'arithmétique à l'algèbre est difficile pour plusieurs élèves, car ils sont amenés à : « essayer de conceptualiser, à essayer de réfléchir avec une donnée inconnue » (RIE, p.10, 388); « Je pense que ça bouleverse pas mal leurs repères un peu. Leurs seuls repères qu'ils ont c'est toujours les nombres » (RIE, p.9, 377-378).

L'entrée dans l'algèbre formelle se fait par le biais du langage, du vocabulaire (terme constant, termes semblables). La résolution de problèmes est introduite à la fin du chapitre lorsque les élèves ont acquis le vocabulaire et tous les mécanismes de résolution. Éric affirme que 30 % de son enseignement en algèbre concerne la résolution de problèmes, et ce, à la fin de son chapitre en algèbre. Tel que le précise Éric, ses collègues fonctionnaient ainsi au début de sa carrière et depuis il suivait cet ordre de présentation des concepts :

> On commence par les termes semblables, les quatre opérations sur les expressions algébriques, toute la nomenclature qui est reliée aux expressions algébriques, donc variable, terme constant et ainsi de suite. Ça toujours été introduit comme ça. Je n'ai pas toujours décidé ça non plus la manière de l'introduire. Plus souvent qu'autrement je travaillais en équipe et c'était une méthode de faire qui est appliquée depuis longtemps (RIE, p.2, 90-94).

Au fil des années, Éric s'est approprié cette planification arguant que les élèves auraient des difficultés s'il commençait par la résolution de problèmes sans présenter préalablement le vocabulaire algébrique et la manipulation de termes algébriques. Éric précise qu'il introduisait l'algèbre toujours de la même façon : « Je pense que l'algèbre, j'ai toujours commencé avec la manipulation des expressions algébriques et non pas avec les équations » (RIE, p.2, 85-86). De plus, la procédure pour simplifier des expressions algébriques ou la démarche de résolution est un outil très important pour Éric : « Ils [les élèves] ne sont pas obligés de penser à qu'est-ce que ça donne, juste défaire les opérations comme ils l'ont vu va les conduire à une réponse. […] Ils ne s'en remettent pas vraiment à la puissance des algorithmes » (RIE, p.10, 413-414). Les propos d'Éric cerne sa vision de l'enseignement de l'algèbre et de son utilité dans la vie quotidienne : « ça tient beaucoup plus, je pense, à la construction de l'esprit puis à la résolution que manipuler des variables » (RIE, p.9, 352-353).

La figure 12 présente la planification d'Éric pour le chapitre portant sur l'algèbre. Éric enseignait premièrement le vocabulaire utile en algèbre, poursuivait avec les manipulations algébriques et terminait avec la résolution de problèmes.

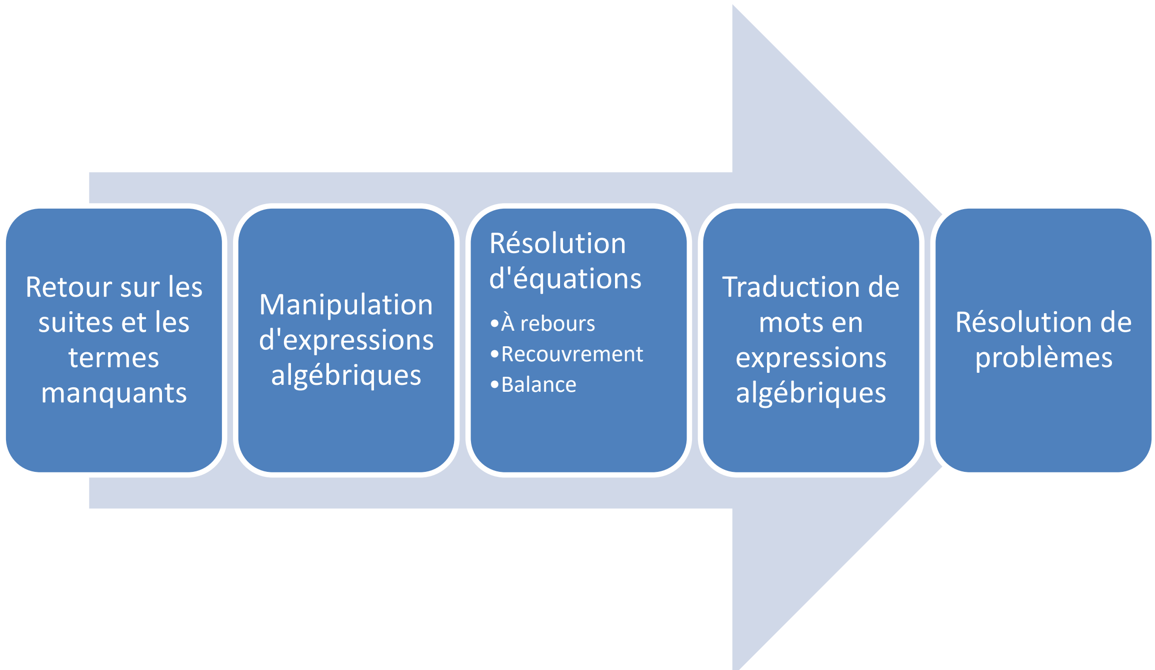


Figure 12 : Planification de l'enseignement de l'algèbre par Éric

1) Retour sur les suites numériques et les termes manquants

Éric faisait un retour sur les concepts vus au primaire et en première année du secondaire concernant les suites et les termes manquants. Il faisait un passage entre l'utilisation d'un « carreau ou boîte vide » pour désigner le terme manquant à une lettre qui représente une inconnue.

2) Manipulation d'expressions algébriques

Selon Éric, une des grandes difficultés des élèves est qu'ils veulent rattacher les lettres à des valeurs numériques pour pouvoir opérer. Ils sont habitués de travailler avec des nombres, mais en algèbre le travail repose sur des inconnues. Ils ne sont à l'aise de travailler seulement avec des expressions algébriques sans connaître leur valeur : « Il a vraiment un passage où l'élève comprend qu'il peut quand même jouer avec des expressions puis tu n'es pas obligé de savoir ce que vaut ta variable pour quand même arriver à une réponse mathématique » (RIE, p.6, 251-254).

3) Résolution d'équations

a. Équations avec des inconnues dans un seul membre de l'égalité

Éric énonce que les procédures de résolution d'équations se rapprochaient de la recherche de termes manquants, tel qu'appris au primaire. Pour aider ce passage entre arithmétique et l'algèbre, Éric remplaçait les variables par d'autres symboles comme des carreaux vides pour permettre aux élèves d'observer les opérations entre les nombres. Éric montrait ensuite les différentes méthodes de résolution d'équations et leurs limites. Il commençait par montrer celles qui sont plus intuitives pour les élèves jusqu'« à la méthode universellement adaptée et la plus efficace, la méthode de la balance » (RIE, p.7, 274). Premièrement, il débutait avec des équations simples ayant des nombres entiers « quelque chose qui se voit à l'œil » (RIE, p.6, 262) comme x-1=5. Deuxièmement, les « élèves utilisent un cheminement à rebours » (RIE, p.6, 263) qui est nommé « opérations inverses » dans *Panoramath* (Cadieux, Gendron et Ledoux, 2005). Éric utilisait beaucoup la métaphore du « nœud à défaire » pour expliciter les opérations inverses à effectuer. Troisièmement, il se concentrait sur la méthode de recouvrement, c'est-à-dire « fixer sur une chose, cacher une partie, donc cette partie devrait être égal à ça » (RIE, p.6, 267-268). Pour montrer les limites de chacune des méthodes, il utilisait beaucoup des nombres différents comme les rationnels (fractions, nombres décimaux), « c'est déjà moins évident de compter mentalement ou de le voir » (RIE, p.6, 271). Quatrièmement, il montrait la méthode de la balance.

b. Équations avec des inconnues dans les deux membres de l'égalité

Éric montrait des équations ayant des inconnues dans les deux membres de l'égalité afin de montrer que les techniques précédentes n'étaient pas efficientes : « Tout d'un coup quand tu te ramasses avec des variables des deux côtés, les techniques ne fonctionnent plus » (RIE, p.6, 272-273). Les élèves doivent utiliser la méthode de la balance qui fonctionne dans tous les cas. Pour certains élèves, ce travail était ardu.

4) Traduction de mots en expressions algébriques

D'après l'expérience d'Éric, il y a un grand travail de traduction du français en expressions algébriques à faire avant d'entrer dans la résolution de problèmes. Cette étape est la plus laborieuse pour les élèves, car ils doivent identifier l'inconnue et s'attarder à la relation entre les nombres. Les expressions comme « de plus », « trois fois plus » sont travaillées et certaines étaient problématiques pour les élèves.

5) Résolution de problèmes

a. Problèmes avec des inconnues dans un seul membre de l'égalité

Éric commençait avec des problèmes simples dans lesquels les élèves réinvestissent ce qu'ils ont appris précédemment. Ils doivent être capables de construire l'équation et de la résoudre (voir les problèmes *Vélo* et *Trouver un nombre* à l'annexe V) : « Le but étant de former l'équation, que l'élève soit capable de la construire puis résoudre. Dans le fond, utiliser l'algèbre comme un outil quand même puissant » (RIE, p.4, 131-133).

b. Problèmes avec des expressions algébriques dans l'énoncé

Éric terminait l'enseignement de l'algèbre par la résolution de problèmes dont les données sont des expressions algébriques au lieu de l'habituelle donnée numérique (voir les problèmes *Poseur de céramique* ou *Football* à l'annexe V). Dans l'énoncé de ces problèmes, il y a « 4x – 1 de plus » plutôt que « 4 de plus ». Ainsi, ces problèmes combinent l'écriture d'une équation à partir d'un énoncé acquise précédemment et la manipulation des expressions algébriques.

Éric relève que pour chacune des composantes de l'algèbre précédemment citées il existe un lien fort entre l'arithmétique et l'algèbre. Les difficultés des élèves constatées par Éric à travers son expérience vont teinter les critères qu'il énonce pouvant influencer la complexité de problèmes en algèbre.

3.3.2 PRÉSENTATION DE FÉLIX

Félix a obtenu un baccalauréat en enseignement secondaire en mathématique et en informatique. Il enseigne les mathématiques depuis onze ans, dont sept ans en 2e secondaire. Habituellement, il a des classes régulières et des classes du Programme d'éducation international (PEI).

3.3.2.1 MOTIF DE SON ENGAGEMENT DANS LA RECHERCHE

Félix a décidé de participer à cette recherche, car il pense être en mesure d'en savoir plus sur les élèves et sur les différents aspects que recouvre l'algèbre :

> Ah tout simplement la curiosité qui m'a emporté. Dans le fond de pouvoir aussi peut-être voir une autre facette, la vision de l'élève par rapport à l'algèbre, que je n'ai pas et pourtant que je devrais savoir (RIF, p.2, lignes 55-57[15]).

Un des objectifs de la recherche collaborative est que les enseignants réfléchissent à un objet d'investigation et en tirent profit dans leur pratique. Félix a exprimé ce qu'il comptait apporter à cette recherche. Il exprime son esprit d'ouverture, de curiosité et il est prêt à se questionner et à changer sa pratique si nécessaire :

> Bien avec mon expérience, il est certain que présentement quand j'enseigne l'algèbre, je l'enseigne différemment dans les premières années où j'ai commencé à enseigner en secondaire 2. Puis de voir dans le fond l'évolution de ça me fait penser que ça va encore changer. Toute amélioration que j'apporte chaque année, exemple participer à des rencontres, pour voir justement ce qui pourraient faire changer ou améliorer les choses (RIF, p.2, 61-66).

---

[15] RIF signifie que la citation est tirée du verbatim *Rencontre individuelle de Félix*. Afin de ne pas alourdir inutilement le texte, les nombres qui sont présentés après la page correspondent aux lignes du verbatim.

3.3.2.2 PLANIFICATION DE SON ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE

La planification de Félix ressemble à celle d'Éric (voir point 3.3.1.2). Comme Éric, Félix base l'enseignement du chapitre sur l'algèbre de septembre à novembre, soit au début de l'année scolaire afin que tous les élèves aient l'opportunité de s'améliorer : « pour donner la chance à tous les élèves » (RIF, p.4-173). Selon lui, l'apprentissage de l'algèbre se fait à long terme : « Je dis souvent à l'élève dans le fond, bon là tu ne maîtrises pas l'addition en algèbre, dans une semaine c'est sûr que tu vas être meilleur. Puis notre but c'est qu'en juin tu sois expert » (RIF, p.3, 92-94). Il concentre, comme Éric, l'enseignement de l'algèbre en un chapitre. Par contre, à la différence d'Éric, Félix voit le chapitre des proportions avant d'amorcer l'enseignement de l'algèbre. Les deux premiers chapitres, soient l'algèbre et les proportions, sont essentiels à la compréhension des autres chapitres selon Félix : « Tous les chapitres dépendent de ces deux premiers chapitres-là » (RIF, p.3, 104); « Le but, c'est de mélanger et de travailler avec d'autres domaines par la suite » (RIF, p.3, 118). Cette vision de l'enseignement des concepts en algèbre rejoint celle d'Éric.

Comme Éric, Félix débute l'enseignement de l'algèbre par le langage algébrique pour terminer avec la résolution de problèmes : « Tu n'es pas obligé de comprendre pourquoi 3x+4, c'est là. C'est une expression algébrique. Je l'ai utilisé et ça se simplifie plus, c'est comme ça. Puis plus tard lorsqu'on va arriver en résolution de problèmes bien là on va le mettre en contexte » (RIF, p.4, 178-180). L'ordre de l'enseignement des concepts d'algèbre est une décision d'équipe de tous les enseignants de mathématique de ce niveau scolaire : « En équipe, on a décidé dans le fond de voir les chapitres qu'on allait voir dans l'ordre qu'on voulait les placer dans l'année » (RIF, p.2, 89-90). Par contre, il « prend le pouls du groupe » (RIF, p.3, 141), il s'adapte au niveau du groupe pour déterminer où ils en sont dans leurs apprentissages. « Si je sens qu'ils ont besoin de plus de périodes, ça ne me dérange pas de déplacer mon examen. Je ne veux pas faire une évaluation pour en faire une » (RIF, p.3, 141). Félix se réfère souvent au PFEQ (MELS, 2006) afin de connaître les concepts et processus à enseigner. Il utilise le manuel scolaire *Panoramath* (Cadieux, Gendron et Ledoux, 2005) et des cahiers de notes dans lesquels il y a des notes trouées, des exemples types qui deviendront des exemples de référence et des exerciseurs. Pour diversifier son enseignement, il préconise également le site Internet *Netmath*, le « teamteaching » avec l'aide d'un enseignant-ressource, les classes inversées et l'utilisation d'une balance algébrique au début de son chapitre. Il consacre environ six périodes à la résolution de problèmes. Félix voit la résolution de problèmes en algèbre comme un réinvestissement des connaissances de base apprises précédemment. La figure 13 présente la planification de Félix pour le chapitre portant sur l'algèbre.

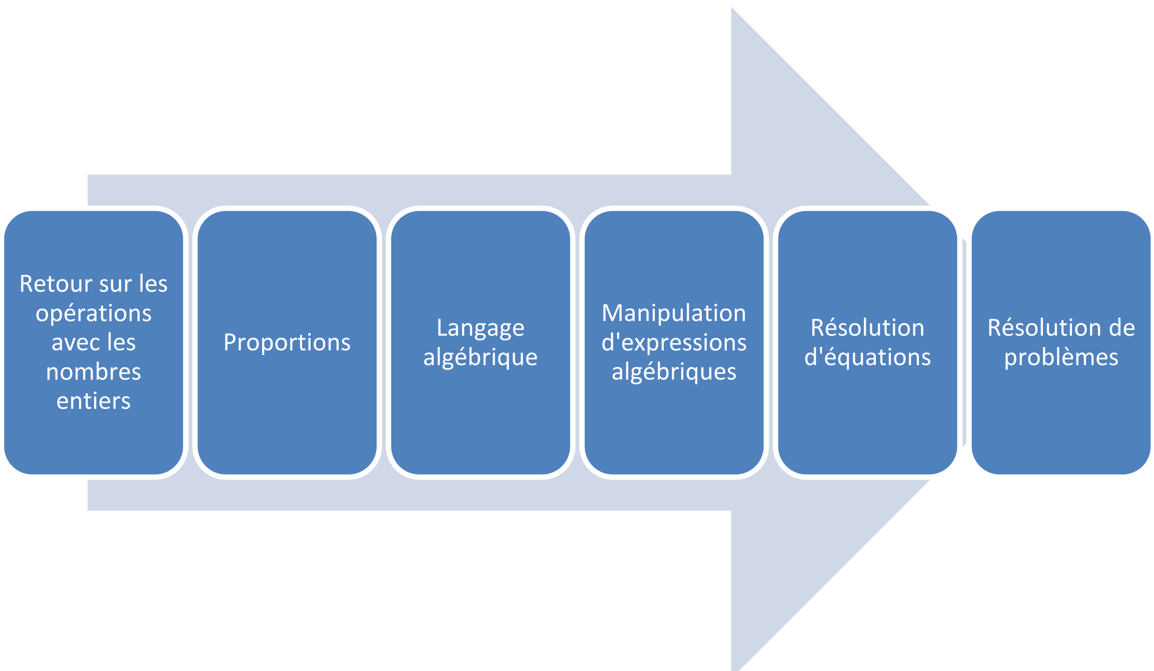


Figure 13 : Planification de l'enseignement de l'algèbre par Félix

1) Retour sur les opérations avec les nombres entiers

Félix fait un retour avec les élèves sur les opérations avec les nombres entiers, car selon lui il faut que cela soit maitrisé avant de faire des opérations avec les expressions algébriques. À ce moment, il aborde la priorité des opérations, les quatre opérations de base, la distributivité et les règles des signes avec les nombres entiers.

2) Proportions

Le premier chapitre de l'année scolaire est celui concernant les proportions, les taux et les rapports. Selon Félix, les élèves ont besoin de faire des proportions en algèbre, donc ce chapitre est le premier abordé en classe.

3) Langage algébrique

Pour Félix, le langage en algèbre est primordial pour réussir. Il compare cela au vocabulaire de base dans l'apprentissage d'une nouvelle langue : « Je pense que la pierre angulaire, c'est vraiment le langage, le départ » (RIF, p.5, 237-238). Il consacre beaucoup d'énergie à l'acquisition du vocabulaire en algèbre.

4) Manipulation d'expressions algébriques

Félix débute la manipulation en algèbre en traduisant un énoncé en expressions algébriques. Par exemple, « deux fois plus » est traduit en $2x$. Ensuite, il poursuit avec la réduction des expressions algébriques. Il est conscient qu'il n'y a pas de contexte rattaché à ces problèmes. C'est pour cette raison qu'il dit qu'« au début, c'est très philosophique » (RIF, p.2, 71). Il termine cette section en combinant la manipulation d'expressions algébriques et des concepts de géométrie. Par exemple, il demande de trouver le périmètre d'une figure dont les côtés sont représentés par des expressions algébriques.

5) Résolution d'équations

Félix poursuit en présentant des équations de tout genre sans utiliser de contexte. Par la suite, il demande de résoudre des équations issues de problèmes géométriques.

6) Résolution de problèmes

Félix explique qu'à partir de cette section du chapitre, il faut réinvestir les concepts acquis précédemment, cette fois-ci dans un contexte de résolution de problèmes. Il commence par identifier l'inconnue en cherchant les mots importants dans le texte. Ensuite, il montre comment construire des expressions algébriques simples comme « le triple de mon âge » qui devient *3x* (x représentant mon âge). Par la suite, il bâtit une équation avec les expressions algébriques construites précédemment. Les premières équations construites par Félix avec les élèves sont du type « une expression algébrique qui égale un terme constant » par exemple « le triple de mon âge plus trois donne 24 » (RIF, p.4, 193). Ensuite, il donne « des phrases avec un *que*, deux de moins que le triple de mon âge » (RIF, p.4, 196). Les problèmes proposés s'appuient sur la comparaison entre deux personnes pour terminer avec des problèmes de comparaison entre trois personnes comme par exemple « Pierre est comparé à Paul puis Paul est comparé à Julie » (RIE, p.4, 208). Ces problèmes à deux inconnues et à trois inconnues sont ainsi nommés par Bednarz et Janvier (1994).

Rappelons que les objectifs de cette recherche collaborative sont de co-construire une grille d'analyse des problèmes écrits en algèbre à la croisée entre la recherche et la pratique ainsi que de comparer les critères d'analyse retenus à ceux recensés par les recherches. L'entrevue individuelle ainsi que l'analyse de copies d'élèves et de problèmes lors des deux rencontres de groupe favorisent des discussions qui permettent d'accéder au rationnel des enseignants. Ainsi, deux enseignants et la chercheure, par le biais de l'activité réflexive, définissent les critères de complexité qui amènent la co-construction d'une grille d'analyse qui va être opérationnalisée en menant l'analyse de la complexité de deux problèmes en algèbre. Les critères de complexité reconnus par chacun des enseignants lors des entrevues individuelles sont repris lors des rencontres de groupe. Ces critères ressortis de façon individuelle par les enseignants dans l'entrevue font l'objet de la section 4.1.

CHAPITRE 4
ANALYSE ET RÉSULTATS

Ce chapitre se structure en différentes parties. Dans un premier temps, les critères exprimés par les deux enseignants lors des entrevues individuelles, soit avant la mise en place d'une activité réflexive, sont présentés. Ensuite, des liens sont tissés entre les critères de complexité à la suite de l'activité réflexive, entre le cadre conceptuel et entre le PFEQ (MELS, 2006). Ainsi, il est possible de retracer les critères de complexité reconnus par les enseignants au début de la recherche et de les contraster par rapport à ceux recensés par la recherche et décrits dans le PFEQ (MELS, 2006). Dans un deuxième temps sont explicités les critères de complexité qui ont été discutés pendant l'activité réflexive. Tel que précisé dans le chapitre III, lors de la première rencontre de groupe, la chercheure demande aux enseignants d'apporter des problèmes pour lesquels ils peuvent se prononcer sur leur complexité. Le rationnel des enseignants en ce qui a trait au choix de ces problèmes permet de raffiner les critères de complexité énoncés dans l'entrevue individuelle. Avec ces derniers s'amorce le travail de co-construction d'une grille d'analyse de problèmes en termes de complexité. Les problèmes présentés aux enseignants lors des rencontres de groupe et ceux apportés par les enseignants sont des prétextes pour faire émerger les critères de complexité. Ainsi, les critères sont décrits, exemplifiés, négociés et bonifiés dans les discussions de groupe qui prennent place dans le cadre de cette recherche collaborative. Dans un troisième temps, à la suite des deux rencontres de groupe, la grille d'analyse des critères de complexité de problèmes écrits en algèbre qui a été co-construite par les participants est expliquée. La grille co-construite est constituée de quatre catégories qui ont été nommées par les participants comme suit : *Organisation physique du texte*, *Ressources de l'élève*, *Mathématisation* et *Type de problème*. Finalement, après avoir explicité les critères qui constituent chacune de ces catégories, deux problèmes proposés par la chercheure lors de la deuxième rencontre de groupe sont présentés. Ils ont permis d'opérationnaliser la grille d'analyse et ainsi permettre aux participants de se prononcer sur la complexité de ces problèmes.

4.1 CRITÈRES ÉNONCÉS PAR LES ENSEIGNANTS AVANT L'ACTIVITÉ RÉFLEXIVE

Lors des entrevues individuelles, les enseignants ont énoncé des critères de complexité en se basant sur leur expérience professionnelle. Une présentation de ces critères pour chacun des deux enseignants est exposée dans cette section. De plus, une comparaison des critères énoncés individuellement par chaque enseignant permet de mettre en lumière les recoupements et les différences. Ce regard croisé permet de contraster les propos des enseignants : 1) de façon individuelle et 2) entre les enseignants. Cela permet aussi de mieux comprendre où se situent les enseignants avant l'activité réflexive qui engage les deux enseignants et la chercheure.

4.1.1 CRITÈRES DE COMPLEXITÉ ÉVOQUÉS PAR ÉRIC

Pendant l'entrevue individuelle, Éric énonce quatre thèmes qui peuvent expliquer la complexité des problèmes écrits en algèbre (voir tableau 27) : 1) l'organisation du problème, 2) la mise en équation, 3) les étapes de résolution et 4) la forme du résultat attendu.

Tableau 27 : Critères de complexité évoqués par Éric

Un regard porté sur	Critères de complexité	Explications
L'organisation du problème	- Longueur du problème - Tirets, puces, picot - Tournure des phrases	- Problème rédigé avec plus d'un paragraphe - Présence de tirets, de puces, de picots - Ordre et construction des phrases
La mise en équation	- Traduction de l'énoncé en une ou plusieurs expressions algébriques - Place de l'inconnue dans l'équation - Combinaison de plusieurs concepts	- Difficulté liée au langage mathématique - Relations de comparaison avec des expressions comme « un de plus », « double » - Inconnue d'un seul côté de l'égalité ou inconnue des deux côtés de l'égalité - Présence de différents concepts
Les étapes de résolution	- Nombre d'étapes - Nature des étapes	- Présence de plusieurs étapes - Présence d'étapes intermédiaires implicites et/ou interdépendantes
La forme du résultat attendu	- Forme du résultat final	- Réponse plus complexe sous la forme algébrique

Un regard porté sur l'organisation du problème

Rappelons qu'Éric a une formation en enseignement du français. Ce bagage teinte les critères qui peuvent influencer la complexité des problèmes en algèbre qu'il énonce. En effet, pour lui, la dimension syntaxique d'un énoncé est essentielle. Un regard est porté sur la présentation physique du texte et sur la structure de l'énoncé : « La façon d'organiser le problème peut changer quelque chose » (RIE, p.12, 488). Ainsi, le problème qui comporte plusieurs paragraphes et qui est organisé avec des puces ou des tirets donne un indice que ce problème est plus complexe qu'un autre ayant un seul paragraphe de quelques lignes. Un autre critère énoncé est la façon dont les phrases sont construites et leur ordre, car si l'inconnue est placée à la fin de l'énoncé, il faut que l'élève réorganise les phrases dans sa tête pour y donner du sens. Éric l'exprime comme suit : « Les tournures de phrases. C'est con, ça reste du français, mais je sais que ça a une incidence sur [..] la complexité chez un élève » (RIE, p.12, 482-483).

Un regard porté sur la mise en équation

Pour Éric, certains critères de complexité sont liés à la mise en équation d'un problème : la traduction d'un énoncé en une ou plusieurs expressions algébriques, la place de l'inconnue dans l'équation et la combinaison de concepts mathématiques. La traduction d'un énoncé en une expression algébrique réfère au fait de passer de l'énoncé en mots à une écriture avec des symboles et des nombres : « S'ils [les élèves] ne sont pas capables de bâtir dans le fond l'équation comme il faut ou l'expression, c'est sûr que ça ne peut pas conduire à une résolution satisfaisante » (RIE, p.10, 394-396). Éric suppose ainsi que les élèves modéliseront toujours les énoncés à l'aide d'une équation. Selon lui, c'est la référence au langage, au vocabulaire mathématique lors de la traduction qui cause cette complexité. Ainsi, Éric désigne comme pouvant être complexes les problèmes ayant des relations de comparaison où l'élève a des difficultés à traduire correctement les relations « de plus que, le double, de moins que » (RIE, p.4, 128). En ce qui a trait à la place de l'inconnue dans l'équation, Éric réfère aux équations ayant de l'inconnue dans un membre de l'égalité et dans les deux membres de l’égalité. Éric souligne que la résolution des problèmes avec une équation ayant l’inconnue dans les deux membres de l’égalité est plus complexe pour les élèves. Finalement, Éric précise que la combinaison de différents concepts mathématiques peut influencer la complexité d’un problème. Il dit qu’on peut « combiner une part d’expressions algébriques […] mélanger à un autre concept assez courant, un concept d’aire, […] ça reste de l’ordre des plus gros problèmes pour les élèves » (RIE, p.11, 436-438).

Un regard porté sur les étapes de résolution

Éric énonce un autre critère qui est lié à la démarche de résolution, soit le nombre d’étapes nécessaires pour résoudre un problème et à la nature des étapes à franchir. Ainsi, selon Éric, un problème est complexe s’il y a plusieurs étapes intermédiaires interdépendantes et que certaines sont implicites. Éric dit que les élèves ne voient pas toujours l’ensemble des étapes à réaliser : « Quand le chemin est moins direct, comporte peut-être deux ou trois étapes, il y en a qui ont de la difficulté à voir dans le fond où ils doivent aller […]. Ils ne voient pas ce qu’il y a faire entre les deux » (RIE, p.11, 444-446). Un travail sur l’enseignement des stratégies de résolution est primordial selon Éric dans ces problèmes complexes.

Un regard porté sur la forme du résultat attendu

Éric évoque le thème de la forme du résultat attendu. Selon lui, un problème qui demande une réponse numérique est moins complexe qu’un problème demandant de trouver comme réponse une expression algébrique.

> C’est des problèmes dans un sens difficile parce que l’élève est habitué de répondre à une question d’un problème, de trouver quelque chose puis d’arriver à une expression algébrique ce n’est comme pas naturel. C’est comme pour lui si le problème n’était pas fini (RIE, p.5, 209-212).

4.1.2 CRITÈRES DE COMPLEXITÉ ÉVOQUÉS PAR FÉLIX

Félix énonce trois thèmes qui peuvent expliquer la complexité des problèmes écrits en algèbre : 1) le texte du problème, 2) la mathématisation, 3) la démarche de résolution. Le tableau 28 regroupe les critères de complexité évoqués par Félix.

Tableau 28 : Critères de complexité évoqués par Félix

Un regard porté sur	**Critères de complexité**	**Explications**
Le texte du problème	- Longueur du texte à lire - Informations fournies	- Un long texte est plus complexe à cause de la compréhension et du décodage. - Présence de données inutiles (superflues) à la résolution du problème
La mathématisation	- Traduction d'un énoncé en une ou plusieurs expressions algébriques - Nombre d'inconnues dans le problème - Concepts mathématiques en jeu	- Difficulté à identifier l'inconnue, formulation des phrases, vocabulaire algébrique utilisé - L'expression « 3 fois plus » est moins difficile que celle « deux de moins que le triple ». - Problèmes à deux inconnues sont plus faciles que ceux qui ont trois ou quatre inconnues. - Présence de concepts plus difficiles comme les fractions.
La démarche de résolution	- Longueur de la résolution	- Nombre d'étapes nécessaires pour résoudre le problème

Un regard porté sur le texte du problème

Un regard est porté sur l'énoncé du problème par rapport à la longueur du texte à lire et aux informations fournies. Félix évoque que plus le texte est long plus cela peut entraîner des difficultés chez les élèves. Ainsi, un long texte est gage d'un défi pour la compréhension et pour le décodage du problème. De plus, Félix précise que les informations fournies dans le texte du problème doivent être claires et sans ambiguïté sinon cela peut causer inutilement des difficultés aux élèves. L'enseignant fait le choix d'éliminer les problèmes ayant des données superflues lors de ses évaluations. Il stipule que l'élève n'a pas à décoder cela dans un problème en mathématique : « Toute l'information que je mets dans le texte est nécessaire. Je ne donnerai pas de données supplémentaires ou superflues » (RIF, p.8, 363-364). Félix précise qu'il lui arrive parfois de mettre des données inutiles dans des problèmes quand les élèves sont en apprentissage.

Un regard porté sur la mathématisation

Pour Félix, certains critères de complexité relèvent de la mathématisation d'un problème : la traduction d'un énoncé en une ou plusieurs expressions algébriques, le nombre d'inconnues dans l'équation et les concepts mathématiques en jeu. Félix stipule que dans la traduction d'un énoncé la formulation des phrases et le vocabulaire algébrique sont très importants. Le langage est la base de l'algèbre selon lui : « Tu vas t'en servir dans ta réduction d'expressions, tu vas t'en servir dans tes équations, tu vas t'en servir dans la résolution de problèmes » (RIF, p.5, 231-232). Selon Félix, si l'élève n'est pas en mesure de bien définir l'inconnue, il aura de la difficulté à résoudre l'équation : « Identifie comme il faut c'est quoi *x*. Donc là, c'est sûr que c'est difficile de composer l'équation si tu ne sais pas c'est quoi *x* » (RIF, p.8, 378-379). Dans la traduction, les relations entre les inconnues sont également gage de difficultés chez les élèves. Par exemple, l'expression « trois fois plus » est moins complexe que l'expression « deux de moins que le triple ». Un autre critère de complexité relevé par Félix se rattache au nombre d'inconnues. S'il y a deux inconnues en relation, cela est moins complexe que s'il y en trois ou quatre. De plus, Félix précise que les concepts mathématiques en jeu influencent la complexité comme la présence de fractions : « Je mets une autre expression algébrique, mais il y a plein de fractions à l'intérieur. […] C'est juste dans le fond le concept qui s'attache à ça qu'il [l'élève] a de la misère (RIF, p.9, 415-417).

Un regard porté sur la longueur de la résolution

Félix énonce que la longueur de la résolution, soit le nombre d'étapes, peut influencer la complexité d'un problème : « Le problème est plus complexe, donc il va être plus long à faire » (RIF, p.9, 434).

4.1.3 RECOUPEMENTS ET DIFFÉRENCES ENTRE LES CRITÈRES DE COMPLEXITÉ DÉCLARÉS PAR LES DEUX ENSEIGNANTS AVANT L'ACTIVITÉ RÉFLEXIVE

Le tableau 29 permet d'avoir une vue d'ensemble et de faire des recoupements entre les critères de complexité énoncés par les deux enseignants. Il est possible de remarquer qu'il y a des critères qui se recoupent et certains qui sont spécifiques à chaque enseignant.

Tableau 29 : Critères énoncés par les enseignants

Regard porté sur	**Propos d'Éric**	**Propos de Félix**
L'organisation du problème (Éric) Le texte du problème (Félix)	- Longueur du problème : problème rédigé avec plus d'un paragraphe	- Longueur de l'énoncé : problème plus difficile s'il est long
	- Tirets, puces, picots : présence de ces points de forme - Tournure des phrases : ordre des phrases et leur construction	
		- Informations fournies : présence de données superflues
La mise en équation (Éric) La mathématisation (Félix)	- Traduction de l'énoncé en une ou plusieurs expressions algébriques ayant des relations de comparaison (« de plus », « de moins », « le double de ») : difficultés à traduire les expressions algébriques	- Traduction de l'énoncé en une ou plusieurs expressions algébriques ayant des relations de comparaison (« 3 fois plus » est plus complexe que « deux de moins que le triple ») : difficultés à identifier l'inconnue, à traduire les expressions algébriques et du vocabulaire mathématique
	- Place de l'inconnue dans l'équation : problème plus difficile dont l'inconnue se situe des deux côtés de l'égalité qu'un problème ayant l'inconnue d'un seul côté de l'égalité	
	- Combinaison de plusieurs concepts : exemple l'aire d'une figure dont les mesures des côtés sont des expressions algébriques	- Concepts mathématiques en jeu : exemple les fractions
		- Nombre d'inconnues dans le problème : les problèmes à deux inconnues sont plus faciles que les problèmes qui ont trois ou quatre inconnues
Les étapes de résolution (Éric) La longueur de la résolution (Félix)	- Nombres d'étapes : plusieurs étapes sont nécessaires pour résoudre le problème	- Longueur de la résolution : nombre d'étapes nécessaires pour résoudre le problème
	- Nature des étapes : présence d'étapes intermédiaires implicites et/ou interdépendantes	
La forme du résultat attendu	- Forme du résultat final : difficulté s'il est une expression algébrique plutôt qu'un nombre	

4.1.3.1 Critères de complexité qui rejoignent les deux enseignants

Il est possible de remarquer qu'Éric et Félix partagent quatre critères de complexité d'un problème écrit en algèbre même si ceux-ci en expriment certains différemment. Un premier critère de complexité dégagé par les deux enseignants est celui relatif à la longueur de l'énoncé. Éric va plus loin que Félix en s'attardant à la structure du texte comme le nombre de paragraphes, la présence de tirets, de puces ou de picots et la tournure des phrases. Deuxièmement, les deux enseignants s'entendent sur le fait que le nombre d'étapes de résolution exprimé également comme la longueur de la résolution par Félix est déterminant. Éric explicite dans ce critère qu'il est important de relever si les étapes implicites (non présentes dans l'énoncé du problème) et si elles sont interdépendantes entre elles. Un troisième critère de complexité reconnu par les deux enseignants est celui lié à la traduction des relations de comparaison. Félix précise que certaines relations sont plus difficiles que d'autres et que l'identification d'une inconnue efficace pour certains problèmes n'est pas évidente. Finalement, les deux enseignants ressortent comme critère commun la présence dans l'énoncé de certains concepts mathématiques. Par contre, chacun d'eux parle de ce critère d'une façon différente. Félix mentionne la présence de concepts mathématiques difficiles, par exemple les entiers versus les fractions. Éric précise que la combinaison de plusieurs concepts influence la complexité d'un problème tel qu'un concept d'aire et des expressions algébriques dans le problème.

4.1.3.2 Critères de complexité propres à chaque enseignant

Éric mentionne que les problèmes qui se mathématisent avec l'inconnue des deux côtés de l'égalité sont plus difficiles à résoudre pour les élèves que les problèmes dont l'inconnue est dans un seul des membres. Éric souligne également que les élèves ont de la difficulté quand le résultat final est une expression algébrique.

Pour Félix, les problèmes ayant des données superflues dans l'énoncé présentent un élément de complexité non négligeable pour les élèves. Félix évoque aussi que le nombre d'inconnues influence la complexité d'un problème. Ainsi, un problème ayant deux inconnues est moins complexe qu'un problème ayant trois ou quatre inconnues. Il évoque ainsi les problèmes avec des « que », soit avec des relations de comparaison.

L'intention des entrevues individuelles était de faire parler les enseignants sur les critères de complexité de façon informelle. Une explicitation plus approfondie est de mise lors des deux rencontres de groupe dont l'objectif est de co-construire une grille d'analyse de critères de complexité pour les problèmes en algèbre qui a du sens pour les enseignants et qui est viable dans la pratique[16]. L'activité réflexive mise en place dans les rencontres de groupe permet de consolider les critères évoqués et d'en ressortir de nouveaux.

4.2 CRITÈRES DE COMPLEXITÉ À LA SUITE DE L'ACTIVITÉ RÉFLEXIVE MISE EN PLACE ENTRE LES PARTICIPANTS

Dans le cadre conceptuel, les critères recensés dans les recherches sont ceux provenant de l'analyse de l'énoncé des problèmes sans tenir compte des facteurs pouvant influencer la résolution de problèmes des élèves. Par contre, les enseignants ont un autre regard. Pour eux, la prise en compte de l'activité de l'élève lors de la résolution d'un problème s'enchevêtre aux critères de complexité de l'énoncé d'un problème décrits dans les recherches. Ainsi, leur expérience en classe les amène à prendre en compte l'activité de l'élève lors de l'élaboration ou du choix d'un problème. De cette façon, Félix mentionne qu'il va présenter des problèmes différents si les élèves sont en apprentissage ou en évaluation et qu'il pense comme un élève lorsqu'il analyse un problème : « Je me mets à la place de l'élève, puis je demande aussi si je suis en apprentissage ou en évaluation (RG2[17],

---

[16] Les problèmes proposés par la chercheure et ceux apportés par les enseignants permettent de préciser les critères de complexité déjà énoncés et d'en formuler d'autres.

[17]RG2 signifie que la citation provient du verbatim de la deuxième rencontre de groupe.

p.3, 147-148). À cet effet, Sebrechts *et al.* (1996) mentionnent que la performance pour la résolution d'un problème résulte de l'interaction entre les connaissances et les compétences d'un élève et du problème en lui-même. Des recherches (Brissiaud, Guillaume et Neyret, 1984; Mayer, 1983) ont été faites pour identifier les facteurs influençant l'élève lorsqu'ils sont en résolution de problèmes.

Dans le cadre de cette recherche collaborative, des discussions durant les rencontres de groupe ont eu lieu afin d'enrichir les connaissances personnelles de chacun des participants et finalement de co-construire une grille d'analyse des problèmes écrits en algèbre. Des critères ont émergé à travers différentes activités (voir chapitre III) : une discussion autour d'un test écrit soumis à des élèves concernant les raisonnements et les taux de réussite pour chacun des problèmes (rencontre de groupe 1, voir annexe I); une discussion autour de problèmes proposés dans un article de recherche (rencontre de groupe 1, voir annexe VI); une discussion autour des problèmes rapportés par chacun des enseignants (rencontre de groupe 1, voir annexe V); l'activité de classement des critères en catégories (rencontre de groupe 2) et l'opérationnalisation de la grille co-construite avec de nouveaux problèmes apportés par la chercheure (rencontre de groupe 2).

Après l'entrevue individuelle et la première rencontre de groupe, 30 critères de complexité ont été exprimés par les enseignants (voir annexe VII). Un travail de regroupement en 13 critères a été effectué pour faciliter la compréhension du lecteur. Ces critères qui ont émergé dans les deux rencontres de groupe sont : 1) l'organisation de l'énoncé, 2) les contraintes, 3) les étapes de résolution, 4) les relations entre les données, 5) la structure du problème, 6) les informations fournies, 7) la nature et la place de la question, 8) la représentation des données, 9) le contexte, 10) les concepts en jeu, 11) les capacités de l'élève, 12) le type de question et 13) le type de réponse. Dans ce qui suit, chaque critère est explicité en reprenant les propos des participants et un parallèle est fait avec les critères énoncés lors des entrevues individuelles ainsi qu'un éclairage par rapport aux travaux de recherche est présenté s'il ne l'a pas été fait dans la section précédente.

4.2.1 ORGANISATION DE L'ÉNONCÉ

Lors de la première rencontre de groupe, Félix reprend une réflexion déjà présentée en entrevue individuelle. Il fait une remarque quant à la longueur du texte à lire dans une situation de compétence 1 et une de compétence 2 (la première compétence ayant habituellement plus de texte que la deuxième). Les deux enseignants sont d'accord sur le fait que la longueur du texte influence la complexité d'un problème : « C'est un constat pour l'élève quand il arrive dans une C2 ou une C1, c'est pire » (Éric, RG2, p.3, 1154). Lajoie et Bednarz (2016) confirment que les problèmes actuels sont plus longs que les problèmes proposés précédemment dans les anciens programmes de formation au Québec : « Ce qui frappe en effet *a priori* c'est la longueur de ces situations-problèmes lorsqu'on les compare aux problèmes courts des époques précédentes » (p.13). Dans son choix de problèmes à partager aux participants, Felix apporte des problèmes ayant environ cinq lignes de texte tandis qu'Éric apporte des problèmes d'une demi-page à une page de texte. Face à ce constat, Félix mentionne que « les problèmes [d'Éric], c'est vrai que je juge que la longueur du texte fait que c'est complexe » (RG1[18], p.3, 109-111). Il précise qu' « on pourrait mettre un problème énorme avec beaucoup beaucoup de texte, une mise en contexte ridicule dans le fond. […] Le problème serait super simple. C'est juste que là c'est plus des difficultés en lecture » (RG2, p.3, 117-118). Par contre, la longueur du texte est souvent associée à un nombre plus ou moins grand de tâches à effectuer pour résoudre le problème. Ce critère est donc lié au critère *Étapes de résolution* d'un problème (voir le point 4.2.3) dans lequel on regarde le nombre de tâches ainsi de l'interdépendance entre celles-ci.

Ce critère est lié également aux *Relations entre les données* (voir le point 4.2.4) dans lequel on s'intéresse à percevoir si la traduction d'un énoncé est directe et si la tournure des phrases peut influencer la façon d'écrire les expressions algébriques ou l'équation. Ainsi, le PFEQ (MELS, 2006) énonce qu'un des paramètres de complexité est le lien

[18] RG1 signifie que la citation est tirée du verbatim de la première rencontre de groupe.

interdisciplinaire. Ainsi, ce critère de complexité est relié au français, à travers la lecture d’un texte, par le vocabulaire utilisé et par la syntaxe des phrases. À cet effet, Houdement (2003) nomme des éléments perturbateurs dans la présentation d’un problème : l’organisation lexicale (mots ou expressions plus difficiles, par exemple « de plus (que) », « de moins (que) »), l’organisation rhétorique (la succession des apports d’informations dans le texte du problème) et l’organisation syntaxique (l’organisation de phrases). Les propos de Houdement (2003) rejoignent aussi les propos d’Éric qui précise que l’ordre des phrases et leur construction peuvent influencer la complexité d’un problème. Toutefois, ces tâches peuvent être présentées de façon ordonnancée dans l’énoncé ce qui favorise ultérieurement la mathématisation du problème tel que mentionné par des chercheurs (Bovet, 1978; Antoun, 2012) et par les deux enseignants lors des entrevues individuelles (l’importance de l’ordre des phrases dans le texte et leur construction). Dans ce sens, Bovet (1978) a fait varier les énoncés d’une même structure relationnelle en modifiant, entre autres, l'ordre d'introduction des informations de l'énoncé. Il remarque que lorsque l'ordre de présentation correspond à l'ordre chronologique de résolution, la réussite est nettement plus élevée. Pour appuyer ses propos, Éric fait référence au problème de *Facebook* (voir annexe VI, problème provenant d’un article) : « Parce que c’est François par rapport à Sophie puis Sophie par rapport à… En fait, les phrases ne sont pas l’ordre. Donc, il faut que tu retravailles dans un ordre différent. Donc, le texte comment il est composé est plus difficile » (RG1, p.29, 1263-1265). De plus, dans le problème *Flamme olympique* (voir annexe XIII, problème proposé par la chercheure lors de la rencontre de groupe 2), Félix précise qu’il y a beaucoup d’informations dans ce problème et que la résolution ne suit pas les informations données de façon séquentielle :

> L’élève doit chercher l’information de lui-même beaucoup beaucoup beaucoup. Si je veux calculer ça, il faut je trouve la réponse pour un flambeau. Il doit savoir où il est. À gauche ou à droite ? Tu es en bas, tu montes, tu reviens (RG2, p.55, 2851-2853).

Éric ajoute aux propos de Félix que l'utilisation de paragraphes, de picots, de puces et de tirets peut influencer la complexité du problème tel que mentionné dans l'entrevue individuelle. Toutefois, une nuance est à faire sur la présence de picots. Il y en a qui désignent des contraintes (voir l'explication du critère *Contraintes* au point 4.2.2). Éric dit que « l'élève doit tenir compte de plusieurs contraintes également : celles qui sont mentionnées avec des tirets ou des picots » (RG1, p.3, 131-132). Par contre, certains picots présentent les étapes séquentielles que l'élève doit suivre pour résoudre: « Si on me demandait un indice souvent bien j'imagine quand on met des tirets c'est parce que tu as vraiment une liste de choses à faire. Je pense que les C1 s'inscrivent là-dedans en général » (RG1, p.3, 116-118). À titre d'exemple, Éric présente le problème *Clôture du 400^{e}* (voir annexe V) qu'il a apporté dans lequel les picots présentent des étapes séquentielles. Il en est de même dans le problème *Enclos* (voir annexe XIII) pour lequel Éric mentionne : « On a des picots, il se fait dans l'ordre » (RG2, p.48, 2468).

4.2.2 CONTRAINTES

Ce critère réfère essentiellement aux problèmes de la compétence 1, *Résoudre une situation-problème,* pour lesquels l'élève doit tenir compte de plusieurs contraintes. Dans le PFEQ (MELS, 2006), l'un des paramètres qui caractérisent les problèmes de cette compétence est « la quantité de contraintes à respecter » (p.24). Ce critère est nouveau, il n'a pas été énoncé par les enseignants dans leur entrevue individuelle. Tel que mentionné dans le critère précédent, *Organisation de l'énoncé* (voir le point 4.2.1), Éric dit que souvent les contraintes sont écrites sous la forme de puces, de picots ou de tirets comme le problème *Flamme olympique* (voir annexe XIII, problème proposé par la chercheure), pour appuyer le grand nombre de contraintes qui sont données. Lajoie et Bednarz (2016) mentionnent que les situations-problèmes (C1) sont construites selon un même modèle, dont la présence de plusieurs contraintes. Par contre, aucune recherche n'a été répertoriée concernant l'influence des contraintes sur la complexité de façon explicite dans un problème ni le type de contrainte qui pourraient faire varier cette complexité.

4.2.3 ÉTAPES DE RÉSOLUTION

Ce critère réfère au nombre d'étapes, aux étapes interdépendantes et aux étapes implicites d'un problème. La longueur de la résolution à faire (critère évoqué par Félix lors de l'entrevue individuelle), soit le nombre d'étapes (critère évoqué par Éric lors de l'entrevue individuelle) est un élément très important pour les enseignants sur lequel ils reviennent souvent lors des deux rencontres de groupe : « C'est des problèmes qui comportent quand même plusieurs étapes avant de former une réponse » (Éric, RG1, p.4, 154-155); « C'est une tâche qui est complexe parce qu'il y a plusieurs étapes. […] Je la mets vraiment dans une tâche complexe parce qu'il y a plusieurs choses à faire » (Félix, RG1, p.4, 169-174). Ce constat rejoint le critère *Nombre, nature et enchaînement des tâches* étudié par les chercheurs (Lester,1980; Jonnaert, Pallascio et Peltier, 1990; Enright et Sheehan, 2002; Antoun, 2012) et qui soulignent que des problèmes demandant plusieurs tâches sont plus complexes. Notons que les enseignants évoquent fréquemment le *nombre d'étapes* tandis que les recherches mentionnent le *nombre de tâches*. Dans les problèmes de compétence 1, Éric mentionne qu'il y a beaucoup d'étapes à franchir pour résoudre. En s'appuyant sur le problème *Flamme olympique* (voir annexe XIII), il précise : « Je trouve que c'est beaucoup d'organisation quelque part. Donc, je mettrais [comme analyse du problème] plusieurs étapes intermédiaires interdépendantes » (RG2, p.55, 2835-2836). Ainsi, pour les enseignants, l'interdépendance des étapes est un élément à considérer : « [Un problème peut demander l'utilisation de] beaucoup de tiroirs, ce qui fait que si l'élève ne réussit pas à faire une étape, il ne sera pas capable de faire l'autre étape » (Félix, RG2, p.49, 2516). Ce critère fait référence à l'enchaînement des tâches étudié par Antoun (2012) dans son mémoire. Antoun (2012) précise également qu'il faut se pencher sur la nature des tâches, c'est-à-dire leur degré de complexité (tâche fermée, problème potentiel, problème, tâche ouverte), ce qui pour les enseignants revient à se questionner sur les tâches implicites, mais sans élaborer sur le degré d'implicite. Le PFEQ (MELS, 2006) stipule également que la quantité et la nature des étapes à franchir est un paramètre de complexité, mais n'en dit pas plus long.

4.2.4 RELATION ENTRE LES DONNÉES

Ce critère fait référence à celui issu de la recherche, soit la *Structure relationnelle* et plus précisément la *Nature des relations* (relations additives et/ou multiplicatives) dans les problèmes de type comparaison selon la classification de Bednarz et Janvier (1994). Rappelons que dans l'entrevue individuelle, Éric énonce que la complexité dans les relations entre les données provient du langage utilisé (de plus, le double de). Félix précise que la relation « trois fois plus » est moins complexe que « deux de moins que le triple ». Des discussions autour de ce critère émergent de différents problèmes. Dans le problème *Vélo* (voir annexe V, problème apporté par Félix), Félix mentionne que le problème « se fait bien parce que dans le fond les liens entre les personnes sont simples » (RG1, p.9, 365-366), c'est-à-dire « 2 km de moins » et « 5 fois plus de km ». Dans le problème *Coquillages* (voir annexe I, problème issu du test écrit), Éric remarque qu' « on nomme trois personnes, les liens sont bien définis entre les personnes pour un total d'objets » (RG1, p.13, 546-547). Les relations entre les données sont « le quadruple » et « neuf de moins ». Donc, il conclut en disant que ce problème n'est pas complexe. Finalement, pour le problème *BD* (voir annexe VI, problème provenant d'un article), Éric affirme que ce problème est simple puisque « les mots sont simples : double puis 15 de plus » (RG1, p.28, 1236). Cependant, rien ne démontre que les enseignants voient une différence de complexité lorsque la relation est de nature additive ou de nature multiplicative. Ils ne relèvent pas que « le double de » est plus complexe que « deux de moins » comme le soulignent Bednarz et Janvier (1994). Par contre, Félix mentionne que la relation simple (additive ou multiplicative) est moins complexe que la relation combinée (additive et multiplicative). Dans le problème *Collection de monnaie* (voir annexe V, problème apporté par Félix), il y a un exemple d'une relation combinée (7 pièces de moins que le quintuple du nombre de pièces) qui est considéré comme étant le plus complexe selon Bednarz et Janvier (1994) et Marchand et Bednarz (1999) : « le problème dans le fond, il n'est pas comme les autres » (Félix, RG1, p.3, 97).

La *Relation entre les données* influence aussi la traduction de l'énoncé en expressions mathématiques ou en une équation pour représenter un problème. Les deux enseignants en ont fait mention dans les entrevues individuelles. Éric dit : « Pour moi ça fait partie ce que j'appelle de la traduction. Si tu veux, transformation français en math » (RG2, p.11, 572-573). Éric spécifie que c'est un processus que les enseignants travaillent beaucoup avec les élèves : « On les aide beaucoup à traduire du français au mathématique. Il y a toujours un bout de phrase pour une inconnue, un autre bout de phrase pour t'aider à faire l'équation » (RG1, p.8, 351-352). À cet effet, Bednarz et Janvier (1994) affirment que la formulation des relations de comparaison peut poser des difficultés aux élèves et qu'il est important d'envisager un travail préalable sur les relations de comparaison avant toute résolution d'un problème impliquant des relations de comparaison. De plus, Vergnaud (1988), de Serres (1997, 2003) et Rojano (2002) stipulent que les élèves, en algèbre, ont de la difficulté à traduire les énoncés en mots en expressions algébriques, car le langage naturel en mathématique est composé de termes usuels propres à la discipline. Finalement, Lane (1991) souligne que l'étape de la traduction des mots à des expressions algébriques est la plus difficile, car les élèves ont de la difficulté à formuler une représentation mentale des phrases qui exprime des relations entre les inconnues.

Dans l'entrevue individuelle, Félix mentionne que le nombre d'inconnues dans le problème peut influencer la complexité, mais il n'en fait plus mention dans les rencontres de groupe. Ainsi, le nombre de grandeurs ou d'inconnues en jeu, critère de complexité selon Bednarz et Janvier (1994) dans les problèmes de comparaison, n'est pas présent dans la grille d'analyse co-construite. Ce critère a pourtant été rappelé lors des rencontres de groupe, mais n'a pas été rediscuté. Cela peut aussi s'expliquer par le fait que les problèmes présentés par la chercheure et apportés par les enseignants comportent deux ou trois inconnues. Si un problème ayant quatre inconnues avait été présenté, peut-être que ce critère aurait émergé de nouveau et ainsi retenu comme un critère de complexité.

4.2.5 STRUCTURE DU PROBLÈME

Éric avait mentionné dans son entrevue individuelle que la place des inconnues pouvait avoir une influence : inconnue d'un seul côté de l'égalité ou inconnue des deux côtés de l'égalité. De son côté, Félix n'avait pas mentionné explicitement les problèmes de comparaison comme étant un élément de complexité, mais il avait dit qu'il travaillait ce type de problème dans sa planification du chapitre de l'algèbre. La structure du problème fait écho aux recherches faites sur la *Structure relationnelle*. Par contre, les recherches sont plus explicites sur ce critère de complexité. Tel que présenté au chapitre II, les recherches s'attardent à distinguer les problèmes connectés des problèmes déconnectés et précisent que les problèmes déconnectés favorisent le raisonnement analytique. Les recherches (Bednarz et Janvier, 1994; Marchand et Bednarz, 1999, 2000; Saboya *et al.* 2013) s'attardent également sur les problèmes impliquant des relations de comparaison et rapportent une grille d'analyse en termes de complexité pour les problèmes à trois inconnues ou plus selon l'enchaînement des relations de comparaison (source, composition, puits). Elles rapportent également l'existence d'autres classes de problèmes comme les problèmes impliquant des relations de transformation (qui sont peu étudiés dans les recherches) et des problèmes impliquant des taux (les critères de complexité relevés par Guzman, Bednarz et Hitt *(*2003) sont la nature des liens de type taux, la formulation du taux et la représentation du taux). La chercheure mentionne qu'un problème ayant plusieurs types de structure relationnelle est plus complexe et les enseignants sont d'accord : « Ça augmente la complexité plus on mélange les types de structure à l'intérieur » (RG1, p.33, 1408-1409).

4.2.5.1 PROBLÈME DE COMPARAISON

Un problème de comparaison, selon Éric, c'est une équation dont « tous les *x* sont du même côté avec un total : le modèle standard » (RG1, p.14, 575-576). Par contre, cette définition n'est pas assez précise puisque des problèmes impliquant des taux peuvent également se modéliser par une équation avec l'inconnue dans un seul membre de l'égalité. Pour Félix, il explicite ce type de problèmes par « la comparaison entre deux personnes s'établit avec le *que* » (RG1, p.10, 432). Bednarz et Janvier (1994) ont établi une classification de ce type de problèmes en distinguant les problèmes de deux inconnues des problèmes à trois inconnues ainsi que leur enchaînement (source, composition, puits). Les enseignants travaillent beaucoup ce type de problème avec les élèves et, de façon implicite, mentionnent que dans les problèmes de comparaison il y a des problèmes plus complexes que d'autres, soit ceux de type puits tel que mentionné dans Bednarz et Janvier (1994). Par contre, ils ne distinguent pas toujours le niveau de difficulté d'un problème source et d'un problème composition sauf pour les problèmes puits qui eux sont bien identifiés.

Voulant travailler sur l'enchaînement des relations de comparaison dans les problèmes à trois inconnues, la chercheure propose aux enseignants des problèmes tirés de Saboya *et al.* (2013) (voir annexe VI). Les enseignants soulignent que le problème *BD* à trois inconnues est considéré comme le plus simple ce qui est confirmé par Bednarz et Janvier (1994) puisque c'est un problème de type source. Par contre, pour le problème *Facebook*, Éric précise que ce type de problème est difficile, car l'élève va devoir modifier une des relations pour rendre le problème plus simple en inversant les relations. Pourtant cette inversion n'est pas nécessaire, car en reprenant la classification de Bednarz et Janvier (1994), ce problème comporte trois inconnues avec deux relations de comparaison (2 de moins et 5 fois plus) dont l'enchaînement est de type composition ce qui est considéré comme un problème de niveau de complexité moyen. Dans le problème *Camp de jour*, qui est une comparaison de type puits, Éric mentionne : « Juste placer *x*, là il faut que je revire une phrase. Tu n'as pas le choix de revirer une phrase. 98 de moins ou 127 de moins, mais là c'est juste des « de moins » et « de plus », donc le contraire c'est un moins puis un plus » (RG1, p.29, 1255-1257). La chercheure résume leurs mots : « Ça nous oblige à faire des opérations inversées pour être capable de voir que la moitié finalement c'est la même chose que le double » (RG1, p.19, 832-833); « Ça dépend vraiment du *Type de problème* parce que ce n'est pas tous les problèmes pour lesquels on a besoin de faire ça » (RG2, p.31, 1569-1571). S'appuyant sur le problème de type puits *Souvenirs* (voir annexe I, problème issu du test écrit), Éric souligne : « Tu peux transformer facilement qu'un gilet coûte trois fois plus cher qu'une tasse, donc une tasse coûte trois fois moins cher qu'un gilet » (RG1, p.17, 717-719). Dans ce même problème, Félix explique la complexité qu'il y voit : « Je vais mettre le *x* à tasse, mais là je ne peux plus parce que si je le mets à tasse, je vais avoir deux variables. Donc, je n'ai pas le choix de mettre *x* à bracelet » (RG1, p.17, 723-724). Ils explicitent ainsi les difficultés relevées par les recherches sur les problèmes de type puits : les élèves le modélisant avec deux inconnues et étant à ce moment-là bloqués dans la résolution. À travers ces divers exemples, il est possible de remarquer que les enseignants ne reconnaissent pas toujours de façon claire le niveau de complexité des enchaînements source et composition.

Lors de l'activité de classement des quatre problèmes tirés de Saboya *et al.* (2013), Félix mentionne qu'il fait les dessins avec les élèves afin de représenter les relations entre les données. Ceci s'apparente à une version simplifiée de la schématisation de Vergnaud (1982) et de Bednarz et Janvier (1994). Dans le problème *BD*, Félix explicite ce qu'il fait : « Bien moi, je fais des liens, des lettres : L [Lucie], R [Roger], F [Frédéric]. L par rapport à R, R par rapport à F. Puis le F, c'est facile, c'est *x*. Tu remontes à R puis tu remontes à L » (RG1, p.28, 1233-1234). Notons que les flèches représentent les relations entre les inconnues, mais aucune indication n'est écrite quant à la nature de ces relations, soit « le double de » et « 15 albums de plus ». L'intention de Félix est de déterminer facilement la place de l'inconnue : « [L'élève] fait les flèches et celui que j'ai le moins d'informations, ça fait que c'est lui mon *x* » (RG1, p.33, 1462-1463). La figure 14 montre un exemple qu'il a fait avec le problème *BD* (problème issu d'un article) :

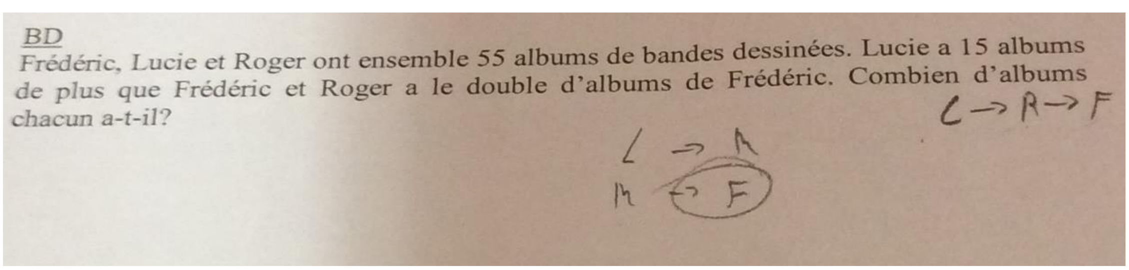

BD
Frédéric, Lucie et Roger ont ensemble 55 albums de bandes dessinées. Lucie a 15 albums de plus que Frédéric et Roger a le double d'albums de Frédéric. Combien d'albums chacun a-t-il?

Figure 14 : Exemple d'une schématisation des relations de comparaison selon Félix

Les enseignants réussissent haut la main la classification des problèmes de l'article de recherche (Saboya *et al*., 2013) en terme de complexité alors qu'ils manifestaient des difficultés à distinguer les problèmes source et composition. Ainsi, il n'y a pas eu beaucoup de discussions autour de ces problèmes. Éric mentionne : « Donc, on savait tout ça intuitivement dans le fond par expérience. C'est pour ça qu'on a classé ça pareil [que la recherche] » (RG1, p.31, 1344-1345). Après le classement des problèmes par les enseignants, la chercheure a expliqué les différences entre chacun des enchaînements en faisant des références aux problèmes du test écrit. Ainsi, en expliquant un problème de comparaison de type composition tel que *BD*, la chercheure fait un lien avec le problème *Coquillages* qui a la même structure de problème. Sous le feu de l'action, la chercheure n'est pas revenue sur les problèmes apportés par les enseignants pour faire ressortir l'enchaînement des relations de comparaison comme critère de complexité et faire un retour sur l'analyse qui avait été menée précédemment autour de ces problèmes. Donc, l'activité de classement des problèmes n'amène pas les enseignants à considérer les différents enchaînements entre les relations de comparaison.

4.2.5.2 PROBLÈME DE TRANSFORMATION

Félix présente le problème *Âge* (voir annexe V, problème apporté par Félix) qui est classé comme un problème de type transformation selon Bednarz et Janvier (1994), mais jamais il le nomme de cette façon. Pour lui, c'est un problème complexe sans être en mesure de l'expliquer davantage : « Il y en a [des élèves] qui vont être capables de le faire, mais je dirais qu'en grande majorité cette question-là est très difficile. Pourtant le texte n'est pas si long de ça » (RG1, p.5, 225-227). Le référent des enseignants pour reconnaître ce type de problème est un problème impliquant des âges entre des personnes, exemple « dans quatre ans, j'aurais le double de l'âge actuel de mon frère ». En discutant du problème *Parc d'amusement* (voir annexe I, problème issu du test écrit) qui fait intervenir de la transformation, Éric mentionne qu'il est moins complexe qu'un problème d'âge : « Oui, mais ce n'est pas comme un problème d'âge où tu dois tenir compte du temps dans quatre ans ou quelque chose comme ça » (RG1, p.32, 1397-1398). De plus, les problèmes de type transformation ne ressortent pas comme un *Type de problème*, même s'ils ont fait une activité de classement et qu'ils en ont discuté avec la chercheure lorsqu'elle a présenté les différents types de problème comme *Argent de poche* et *Destination de vacances* (voir annexe I, problèmes issus du test écrit).

4.2.5.3 PROBLÈME DE TAUX

Parmi les problèmes utilisés dans le cadre de cette recherche, les problèmes de taux regroupent ceux qui impliquent des variables dépendantes et indépendantes et ceux présentant une valeur monétaire. Les enseignants n'ont pas fait mention de ce type de problème dans leur entrevue individuelle. Les problèmes de taux sont répertoriés dans la recherche (Bednarz et Janvier, 1994; Guzman, Bednarz et Hitt, 2003). Ces problèmes sont considérés comme très complexes par les enseignants : « Tu sais moi, je ne le donne même plus en classe parce que je trouve que c'est plus en secondaire trois et quatre parce qu'on parle dans le fond comme une variable dépendante et indépendante à l'intérieur de ça » (Félix, problème *Croissance d'une plante*, RG1, p.14, 604-607). Les enseignants soulignent ce qui cause des difficultés aux élèves : « Moi, je considère qu'un des difficultés c'est le fait que la situation n'est pas fixe. Elle produit, il en rentre, il en sort » (problème *Fromage*, RG2, p.51, 2618-2619). En effet, une des caractéristiques de ces deux problèmes est la présence de liens spatio-temporels (cm/an dans le problème *Croissance d'une plante* et litre/jour dans le problème *Fromage*) tel que le présentent Guzman, Bednarz et Hitt (2003). Les enseignants reconnaissent la difficulté du lien spatio-temporel comme la vitesse (problème *Destination de vacances* issu du test écrit, voir annexe I) et le nombre de sauts par seconde (problème *Saut de kangourou*, voir annexe XIII).

Les problèmes de taux invoquant des valeurs monétaires sont également considérés complexes et les liens sont, dans ce cas, non spatio-temporels. Éric en fait mention lorsqu'il parle du problème *Enfants malades* (voir annexe XIII) : « Les problèmes où il faut qu'on mélange l'argent avec le nombre, l'élève a comme deux choses à trouver. Puis l'élève va chercher un nombre de canettes et un nombre de sous noirs. Puis souvent on ne pense pas à multiplier par l'argent » (RG2, p.44, 2292-2294). Les enseignants n'ont pas relevé que certains problèmes de taux sont de nature discrète (*À la ferme, Fromage*) et d'autres de nature continue (*Enfants malades, Saut du kangourou, Croissance d'une plante*). La formulation du taux (explicite, semi-implicite ou implicite) et la représentation du taux (en mots ou en symboles) n'ont pas émergé dans les discussions. Pourtant, dans le problème *Saut du kangourou*, il y a un taux explicite (12 km/h) et un taux semi-explicite (2 sauts en 1,5 seconde). La formulation d'un taux de façon implicite est présente dans le problème *Enfants malades* lorsqu'il est écrit que les gens donnent des canettes de 5 ¢, car l'élève doit comprendre que chaque canette a une valeur de 0,05 $. Il est de même dans le problème *À la ferme* (voir annexe XIII) où le taux (nombre de pattes par animal) n'est pas explicite dans l'énoncé.

4.2.5.4 PROBLÈME DE MISE EN ÉGALITÉ

Les problèmes de mise en égalité ainsi décrits dans la recherche (Tremblay et Saboya, sous presse) sont nommés autrement par les enseignants, soit des problèmes ayant des *x* de chaque côté de l'égalité. En effet, les problèmes de mise en égalité se généralisent par la forme « ax + b = cx + d ». Dans l'entrevue individuelle, Éric est le seul à reconnaître que ce type de problème est complexe. Félix l'exprime pour la première fois dans la première rencontre de groupe lorsqu'il présente le problème *Collection de monnaie* (voir annexe V, problème apporté par Félix) qu'il a apporté :

> Le problème dans le fond n'est pas comme les autres. Là on a une phrase qui rajoute « Sachant que Louis et Guillaume possèdent le même nombre de pièces ». Donc là, pour bâtir l'équation, c'était différent des problèmes qu'on avait vus avant. […] D'habitude, ce genre de question, c'est l'ensemble des trois amis et leur collection est égal à [un total]. Donc là ce n'est pas une somme, c'est une égalité entre deux personnes (RG1, p.3, 97-105).

Les enseignants vont plus loin dans la description de ce critère de complexité et notent des différences entre certains problèmes. Ainsi, dans le problème *Musique* (voir annexe I), les enseignants remarquent que l'équation n'est pas égale à un total comme dans le problème *Coquillages* (qui est un problème issu du test écrit impliquant des relations de comparaison) : « Tandis que *Musique*, ta deuxième phrase pour faire l'équation c'est qu'ils ont chacun le même nombre de chansons à ranger, puis on part ça de même » (Éric, RG1, p.14, 611-613). Éric précise : « Il y a une comparaison à faire qui suggère dans le fond qu'ils ont le même nombre de chansons. Ça fait que faire l'équation je pense que c'est beaucoup plus difficile pour l'élève rendu là à *Musique* » (RG1, p.14, 586-588). En effet, la mise en égalité du problème *Musique* est implicite selon la classification de Tremblay et Saboya, (sous presse), car il n'y a pas d'expression explicite, soit « est égal à », « équivaut à », « correspond au double de ». Ils s'entendent tous les deux pour dire que ce problème semble plus complexe pour les élèves que le problème *Coquillages*, car la relation qui exprime l'égalité est présentée au début du problème et non pas à la fin. L'élève doit revenir au début du problème pour détecter la mise en égalité. Félix mentionne même qu'il ne donne pas ce type de problème à ces élèves, car il le voit comme un problème ayant deux variables, donc ce problème devrait être traité au deuxième cycle du secondaire. Éric renchérit en signifiant que ce sont des problèmes complexes en 2^e^ secondaire. Dans le problème *À la ferme* (voir annexe XIII), Éric le décrit comme « Mise en égalité, oui parce qu'il n'y a rien qu'indique où normalement ils sont habitués de trouver un total, quelque chose » (RG2, p.43, 2198-2199). En effet, ce problème est un problème de mise en égalité, dont la relation d'égalité est implicite, ce qui rend le problème encore plus complexe. En effet, Tremblay et Saboya (sous presse) affirment que la formulation implicite de la relation d'égalité est plus complexe que les deux autres catégories, soit le même constat que les enseignants. Ce type de problème est désormais plus présent dans les manuels depuis l'avènement du PFEQ (MELS, 2006) selon Saboya et Tremblay (sous presse).

4.2.6 INFORMATIONS FOURNIES

Le critère autour de la présence des *Informations fournies* dans un problème a été évoqué par Félix dans l'entrevue individuelle et est également décrit dans la classification du MEQ (1988). Lors de la première rencontre de groupe, Félix mentionne que ce critère est important pour lui et Éric y adhère rapidement et dit : « C'est sûr que tu te ramasses avec beaucoup d'informations, donc tu dois apprendre à distinguer ce qui est nécessaire ou non » (RG2, p.11, 530-531). La chercheure spécifie que « ça va alourdir finalement le texte s'il y a beaucoup d'informations inutiles » (RG2, p.24, 1200). En s'appuyant sur le problème *Enfants malades* (voir annexe XIII), Éric évoque qu'il y a beaucoup d'informations : « Je trouve qu'il en a même des inutiles aussi. C'est une belle histoire, mais mathématiquement il y a moins d'affaire là-dans » (RG2, p.44, 2268-2269). Donc, pour les enseignants, ce critère, dont la présence de données superflues, est important pour juger de la complexité d'un problème tout comme l'ont mentionné certains chercheurs (Englert, 1987; Kouba, 1988; Carpenter *et al.*, 1989; Muth, 1991; Leon, 1992; Leung et Silver, 1997, Eynard-Bontemps et Sibari, 2006) et tel que le souligne le PFEQ (MELS, 2006) qui précise que l'élève doit dégager les données essentielles. Par contre, dans les recherches et le MEQ (1988), d'autres types de données sont distinguées (manquantes, suffisantes, complètes). Au regard des problèmes amenés par les enseignants et ceux proposés dans les différentes activités de cette recherche, il est possible de constater que ces autres types de données ne sont pas présentes, donc non retenu dans ce critère de complexité.

4.2.7 NATURE ET PLACE DE LA QUESTION

Ce critère n'a pas été évoqué lors des entrevues individuelles. Lors des rencontres de groupe, les enseignants ont fait une distinction entre les questions ayant un point d'interrogation et celles ayant un point qu'ils considèrent comme une consigne à faire. Par exemple, « Quelle est la longueur du côté AB ? » ou « Détermine la longueur du côté AB ». Éric mentionne qu' « avec l'élève, souvent la question est quand même simple, mais parfois ce n’est pas tout à fait évident. Il n’y a pas toujours un point d’interrogation » (RG2, p.11, 532-533). Ce critère est lié au critère *Type de question* (voir le point 4.1.12) dans le sens que la formulation de la question peut avoir une incidence sur l’activité cognitive demandée dans un problème. Dans les recherches, le type de phrase, interrogative ou déclarative, n’est pas recensé comme étant un critère de complexité.

De plus, un questionnement autour de la place de la question émerge lors de la deuxième rencontre de groupe après la lecture du problème *Enclos* (voir annexe XIII), car la question n’est pas à la fin de l’énoncé comme pour les problèmes qu’ils ont analysés précédemment. En parlant de ce problème, Éric fait la distinction suivante :

> Je pense qu’en la [question] mettant en dernier, encore là c’est difficile. Ce n’est pas une question parce que ça termine par un point. C’est une consigne. Bien en la plaçant en dernier par exemple, on s’approche plus des problèmes de type C1 où la phrase se terminait avec un point d’interrogation. Ce que tu as à faire est à la fin en général. […] Oui, mais en la mettant à la fin, je pense que l’élève peut se référer à ça. Ce qui est écrit. C’est la dernière chose qu’il a à faire, c’est la dernière chose qui est écrite (RG2, p.49, 2537-2540).

Donc, un problème est plus simple si la question est placée à la fin de l’énoncé parce que les élèves sont habitués à cette organisation du problème. Ce critère, la place de la question, a été étudié par certains chercheurs. Fayol (1990), Thevenot, Barouillet et Fayol (2004) ainsi que Devidal, Fayol et Barrouillet (1997) indiquent que lorsque la question est placée en tête de l’énoncé, les élèves réussissent mieux les problèmes. Par contre, les enseignants affirment le contraire, car ce n’est pas la présentation habituelle d’un problème.

4.2.8 REPRÉSENTATION DES DONNÉES

Un autre critère non mentionné dans les premiers propos des enseignants, mais qui est ressorti après avoir analysé des problèmes lors de la deuxième rencontre de groupe, c’est le critère de la *Représentation des données*. Ce critère a émergé à la suite de la lecture du problème *Enfants malades* (voir annexe XIII). La chercheure fait remarquer aux enseignants que dans ce problème, il est écrit 5 ¢ sous la forme symbolique ce qui requiert une interprétation par l'élève pour passer en écriture décimale, soit 0,05 $. Les enseignants ont opté pour l'ajout de ce critère dans la grille d'analyse. Félix repère également ce critère dans le problème *Vente d'ordinateurs* (voir annexe XIII) où les données sont présentées dans une table de valeurs) : « Par expérience, une table de valeurs, les élèves des fois ont de la misère à dire que c'est proportionnel » (RG2, p.54, 2772). De plus, Éric mentionne que le problème *Flamme olympique* (voir annexe XIII) est complexe « à cause de la diversité du type de données[19] » (RG2, p.55, 2812) qui contient des représentations sous la forme de mots, d'un graphique et de tableaux. Le schéma a été utilisé, même si les enseignants ne l'ont pas relevé, dans les problèmes *Aire des cheveux, Cinéma, Clôture du 400^e^, Logo d'une compagnie* et *Enclos*. Il en est de même pour problèmes *Flamme olympique, Vente d'ordinateur, Clôture du 400^e^* et *Cinéma* où des données sont représentées dans un tableau ou une table de valeurs. La règle n'est pas présente dans les énoncés de problèmes apportés par les enseignants ni dans ceux des nouveaux problèmes qui servent à opérationnaliser la grille d'analyse. À l'inverse, la représentation en mots est présente dans tous les problèmes. Ce critère de la *Représentation des données* fait référence à celui issu de la recherche, soit les *Registres de représentation* évoquée, entre autres, par Duval (1993) et Murray, Clermont et Binkley (2005). Par contre, Duval (1993) souligne en plus l'importance de la formation, du traitement, de la conversion et de la coordination entre les différents registres de représentation pour avoir accès au concept mathématique. Donc, les enseignants et les chercheurs s'entendent pour retenir que la *Représentation des données* peut influencer la complexité d'un problème en algèbre même s'ils ne nomment pas ce critère de la même façon. Dans le PFEQ (MELS, 2006), les registres de représentation sont aussi un paramètre de complexité.

[19] Attention, ne pas confondre l'expression « type de données » évoquée par Éric en tant de registres de représentation et le type de données au sens de données superflues, complètes, manquantes et insuffisantes (MEQ, 1988).

4.2.9 CONTEXTE

Le contexte est l'habillage du problème. Ce critère n'est pas ressorti lors des entrevues individuelles et émerge pour la première fois dans le problème *Football* (voir annexe V, problème apporté par Félix). Les enseignants soulignent qu'un contexte plus ou moins connu des élèves peut influencer la complexité du problème tout comme Sebrechts *et al.* (1996). Dans ce problème, il faut avoir des connaissances de base sur ce sport pour être en mesure de le résoudre. Éric l'explique comme suit : « Il faut que tu connaisses le football sinon tu perds des gens en fait » (RG1, p.13, 299). Félix mentionne : « Cette tâche-là est difficile parce qu'il y a un concept[20] qui est dans le fond savoir comment ça marche le football : premier essai, deuxième essai, troisième essai, quatrième essai » (RG1, p.13, 302-304). Ce critère fait référence au critère issu de la recherche, soit le *Contexte*. Ainsi, l'importance est mise sur la connaissance des élèves du contexte pour résoudre et non sur sa classification. La distinction entre les différents types de contexte ne ressort pas dans cette grille d'analyse co-construite. Pourtant, selon le classement de Caldwell et Goldin (1979, 1987), la plupart des problèmes analysés lors des discussions sont de nature concret, soit factuel ou hypothétique, et selon le classement du MEQ (1998) ce sont des problèmes avec un contexte réaliste. Les problèmes *Poseur de céramique*, *Football* et *Aire des cheveux* sont de nature fantastique, car le poseur de céramique installe 2x-8 morceaux ce qui n'est pas réaliste. Il n'y a pas de problème réel analysé dans le cadre de ce projet. Le problème *Trouver le nombre* (voir annexe V, problème apporté par Félix) est de nature purement mathématique selon le classement du MEQ (1988) ou à l'intérieur des mathématiques selon Porcheron (1998). De plus, les enseignants ne mentionnent pas l'importance que le problème soit contextualisé, car il semble aller de soi que la finalité du chapitre de l'algèbre soit des problèmes avec un énoncé. Dans le PFEQ (MELS, 2006), il est indiqué que les problèmes devraient s'inspirer, entre autres, des domaines généraux de formation et des repères culturels ce qui ne semble pas être pris en considération dans la pratique des deux enseignants, car ils n'en font pas mention dans leurs discours.

[20] L'enseignant parle de « concept », mais en fait il évoque le contexte du football.

4.2.10 CONCEPTS EN JEU

Le critère de *Concepts en jeu* fait référence au concept et au nombre de concepts présents dans un problème évoqués dans les entrevues individuelles et dans les recherches. Dans les entrevues individuelles, la complexité de ce critère provient du mélange de plusieurs concepts selon Éric et de la présence de concepts plus difficiles comme les fractions selon Félix. Selon les enseignants, il y a des concepts plus difficiles pour les élèves, par exemple les fractions, la manipulation algébrique et le changement d'unités de mesure. Félix explique que « c'est juste dans le fond le concept qui s'attache à ça pour lequel l'élève a de la misère. L'exemple le plus fréquent, c'est les fractions » (RIF, p.10, 412). Il renchérit en faisant référence au problème *Trouver un nombre* (voir annexe V, problème apporté par Félix) : « Bien là je mettais la tâche comme étant complexe parce qu'il y avait des fractions à l'intérieur » (RG1, p.6, 241). À cet effet, Carpenter *et al.* (1980), Beaulac (2006) et Kouba (1988) ont recensé que les élèves performent mieux lorsque des nombres entiers sont en jeu plutôt que des fractions, des nombres décimaux ou des pourcentages. Dans le problème *Destination de vacances* (voir annexe I, problème issu du test écrit), Félix mentionne que la vitesse est complexe pour les élèves : « ça les km/h, ça change, ça c'est dur […] Concept de vitesse, c'est dur. Tu roules à 8h. Là, c'est 10 km par heure. Ça fait que là le « par heure » faut l'enlever à qui ? C'est comment ? Par heure ? » (RG1, p.15, 629-630). De plus, Félix mentionne dans le même problème que le changement d'unité de mesure est complexe pour les élèves : « On est en présence de concepts plus difficiles comme les changements d'unité » (RG2, p.41, 2119). Le même constat est fait dans le problème *Saut du kangourou* (voir annexe XIII) : « Saut en seconde. On donne une vitesse en km/h. On veut une course sur 100 mètres. Les unités ne sont pas du tout pareilles. Je pense que pour un élève c'est difficile peut-être de voir qu'il faut qu'il mixe les sauts par seconde avec la vitesse » (Éric, RG2, p.40, 2045-2047).

Le nombre de concepts en jeu est également à prendre en considération. Éric exprime à ce propos que le problème *Clôture du 400^e^* (voir annexe V, problème apporté par Éric) est complexe, car « je pense qu'il y a tout d'abord plus d'un concept » (RG1, p.3, 127). Ce problème combine le périmètre, le rapport, l'aire, la situation de proportionnalité et le taux. Félix pense aussi que la combinaison de plusieurs concepts peut influencer la complexité : « plus il y a de concepts, plus la tâche est complexe » (RG1, p.36, 1577). Félix renchérit en stipulant : « Je mettais plusieurs concepts à l'intérieur. Donc, un concept de fraction, un concept de géométrie, un concept en algèbre dans la même question. Donc là, il y a plusieurs concepts dans la même question » (RG1, p.2, 44-46). Plusieurs problèmes sont identifiés comme possédant ce critère de complexité tel que le problème *Âge* (voir annexe V, problème apporté par Félix) qu'y « est complexe parce que je mettais des fractions et de l'algèbre » (RG1, p.6, 237). Pour le problème *Flamme olympique* (voir annexe XIII), Éric exprime que le problème est complexe, car on a la « combinaison de plusieurs concepts » (RG2, p.56, 2870), soient la proportion, le rapport, le taux, la situation de proportionnalité et le pourcentage. De plus, Éric mentionne qu'un problème peut aussi être complexe lorsqu'on « mélange les expressions algébriques et l'équation » (RG1, p.7, 290) comme dans le problème *Football* (voir annexe V, problème apporté par Félix) ou lorsqu'on « mélange à la fois expressions algébriques avec des inconnues et un concept d'aire » (RG1, p.8, 329) comme le problème *Poseur de céramique* (voir annexe V, problème apporté par Félix). Notons que la combinaison de plusieurs concepts n'est pas aussi explicite dans les recherches que dans les propos des enseignants. Ce critère fait référence au critère issu de la recherche, soit les *Concepts mathématiques*, critère également recensé le PFEQ (MELS, 2006) qui souligne que les concepts mathématiques en jeu influencent la complexité par la « nature des liens sollicités entre les champs mathématiques ou entre les concepts et processus » (p.14). Par contre, aucun exemple n'est donné pour appuyer ces propos. Une remarque est de mise, les problèmes analysés se classent essentiellement dans les champs mathématiques de la géométrie et de l'algèbre selon le classement du PFEQ (MELS, 2006). Il aurait été judicieux de combiner d'autres champs comme les statistiques.

4.2.11 CAPACITÉS DE L'ÉLÈVE

Les capacités d'un élève à réinvestir ses connaissances, de penser autrement devant un problème est primordiale en situation de compétence. Ce critère n'est pas mentionné dans les entrevues individuelles. Éric dit que l'élève « doit changer un peu la manière de penser dans un problème où il va devoir sortir des sentiers battus de ce qu'on lui a montré » (RG1, p.1, 34-35). Il précise de plus que les élèves ont de la difficulté à transférer leurs connaissances et leurs compétences dans d'autres contextes : « Il y en a qui vont reproduire le modèle que tu fais puis dès que tu présentes quelque chose qui sort un peu [des sentiers battus], ils sont perdus » (RG2, p.38, 1926-1927). En s'appuyant sur le problème *Aire des cheveux* (voir annexe V, problème apporté par Éric), Éric mentionne que les élèves ont de la difficulté à visualiser les étapes du problème.

> Le problème est difficile parce qu'il y a quelque chose que les élèves ne voient pas, donc ils ne voient pas que ça forme un trapèze en fait puis c'est un des chemins possibles, peut-être le plus simple aussi. Donc, il doit y aller par soustraction d'aire, ça c'est un procédé qu'ils connaissent, mais on dirait qu'ils ont de la difficulté à l'appliquer. Donc, il y a une méconnaissance de quelque chose. Donc, ils cherchent des mesures, ils se raccrochent à des choses qui ne fonctionnent plus. Donc, ils ne voient pas l'autre chemin possible (RG1, p.6-258-264).

La capacité à faire des inférences implique que les élèves doivent déduire certaines données du problème. La chercheure spécifie aux enseignants qu' « il y a des éléments qu'il faut que tu saches d'avance pour être capable de [résoudre le problème]. Ce n'est pas marqué explicitement dans le texte qu'il faut faire ça » (RG2, p.4, 178). À cet effet, Éric mentionne qu' « il faut que l'élève fasse une petite inférence pour qu'il arrive tout seul à découvrir quelque chose » (RG1, p.1, 39). Houdement (2011) propose une typologie des inférences : pragmatique (connaissance de la réalité), sémantique (interprétation que se fait l'élève du problème), syntaxique (analyse des relations entre les objets mathématiques). C'est en prenant appui encore une fois sur le problème *Aire des cheveux* (voir annexe V, problème apporté par Éric), qu'Éric exprime sa compréhension de ce critère, soit une inférence pragmatique selon Houdement (2011) :

> Ils doivent trouver la hauteur complète du logo, mais on donne à la base juste le périmètre de la figure. Donc allumer, retour à la base, que ce sont des carrés, c'est précisé, donc ils peuvent connaître la mesure de chaque côté du carré par le fait même la mesure de chaque côté de l'hexagone. Ils doivent se souvenir que dans l'hexagone il y a des angles de 60° donc les triangles sont côtés équilatéraux et donc voilà ça complexifie un peu l'affaire. …]. Donc il y a une inférence à faire aussi pour trouver les apothèmes et tout ça (RG1, p.7, 266-272).

Il y a une inférence sémantique (Houdement, 2011) dans le problème *Parc d'amusement* (voir annexe I, problème issu du test écrit) quand Éric mentionne que l'élève doit inférer « qu'il travaille avec 120 % de la variable » (RG1, p.16, 684). Pour appuyer les propos jusqu'ici mentionnés, la chercheure fait ressortir que dans le problème *À la ferme* (voir annexe XIII), « il y a beaucoup d'inférences parce qu'il faut que tu saches qu'une poule à 2 pattes puis qu'un cheval a 4 pattes » (RG2, p.42, 2131). Remarque qui amène Éric à réagir comme suit : « Bien en fait la tête va te donner le nombre d'animaux en tout. Moi je pense que ça en est une inférence là » (RG2, p.42, 2139). Cette inférence est qualifiée de pragmatique selon Houdement (2011).

Par ailleurs, la capacité de visualiser en trois dimensions est un élément important présent surtout dans des problèmes faisant intervenir de la géométrie. C'est ce qu'Éric nomme la capacité « de passer du modèle à la réalité » (RG1, p.5, 253). Cette capacité réfère au sens spatial définit par Marchand (2009) comme « les connaissances qui permettent à un sujet un contrôle convenable de ses relations à l'espace sensible » (p.67). Ainsi, le sens spatial est lié au champ de la géométrie et est développé au cours du cursus scolaire des élèves. Par contre, certains élèves ayant un ou des difficultés d'apprentissage ont une lacune dans le sens spatial. En s'appuyant sur le problème *Cinéma* (voir annexe V, problème apporté par Éric), Éric énonce comme suit cette capacité de l'élève :

> La difficulté à mon avis réside peut-être plus pour certains dans la visualisation 3D des contenants. Ils oublient beaucoup de choses, ils ne voient pas les contenants faits. Bien que ça soit une situation qu'ils ont connue, d'acheter du popcorn au cinéma. Ça, je pense, c'est un élément vraiment particulier qui rend la chose de difficile pour eux (RG1, p.7, 281-285).

4.2.12 TYPE DE QUESTION

Le *Type de question* n'est pas mentionné dans les entrevues individuelles. Durant les rencontres de groupe, Félix fait souvent référence à deux types de problèmes tirés du document d'information des épreuves uniques ministérielles de 4^{e} secondaire où l'on décrit les deux catégories de situations d'application, soit les problèmes de compétence 2 (voir tableau 30). Rappelons qu'il enseigne aussi en 4^{e} secondaire où une épreuve ministérielle est administrée et où ce document d'information est envoyé aux enseignants.

Tableau 30 : Deux types de situations d'application

Catégorie I	Tâches où l'élève doit élaborer et appliquer un ensemble ou une suite d'opérations lui permettant de répondre aux exigences de la tâche en faisant appel aux concepts et aux processus mathématiques ainsi qu'aux stratégies appropriées.
Catégorie II	Tâches où l'élève fait appel à différentes facettes du raisonnement pour convaincre à l'aide d'arguments mathématiques, reconnaître un modèle et l'appliquer, démontrer une affirmation ou une propriété, invalider une affirmation à l'aide d'un contre-exemple ou formuler une conjecture.

Source : Ministère de l'Éducation, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. 2015. Document d'information - Juin 2016 - Juillet 2016 - Janvier 2017 : Mathématique, 4^{e} année du secondaire. Gouvernement du Québec

Ce critère fait référence, en partie, au critère issu de la recherche, soit l'*Activité cognitive*. Les problèmes de connaissances et de compréhension (Bodin, 2004), de formulation de situations (OCDE, 2013) ou de concepts (Sebrechts *et al.*, 1996) sont pris en considération dans une autre section de l'épreuve ministérielle, car ils ne sont pas considérés comme étant des problèmes en situation de compétence. Les problèmes d'application (catégorie I) font référence à ceux d'application selon Bodin (2004) et de Sebrechts *et al.* (1996) et à ceux de l'utilisation de l'OCDE (2013). Les problèmes de démonstration, de justification, de conjecture (catégorie II) font référence à ceux de jugement et de créativité (Bodin, 2004), à ceux de l'interprétation (OCDE, 2013) et à ceux de résolution (Sebrechts *et al.*, 1996). Les différents classements sont présentés dans le tableau 31. Les problèmes présentés et apportés par les enseignants se situent tous dans les problèmes d'application de catégorie 1.

Tableau 31 : Classement selon le *Type de question*

MEESR (2015)	Bodin (2004)	OCDE (2013)	Sebrechts *et al.* (1996)
Application (catégorie I)	Application	Utilisation	Application
Démonstration, justification, conjecture (catégorie II)	Créativité et jugement	Interprétation	Résolution

4.2.13 TYPE DE RÉPONSE

Ce critère fait référence à l'ouverture ou non de la réponse et à la nature de la réponse, soit numérique ou algébrique. En s'appuyant sur le problème *Clôture du 400e* (voir annexe V, problème apporté par Éric), Éric rappelle ce critère en faisant surtout référence à la compétence 1 : « Où on a une situation qui est grande, qui ne peut pas être une réponse unique nécessairement, mais tu as plutôt une plage de réponses possibles » (RG1, p.3, 130-131). Il souligne : « Comme dans une C1 on cherche plutôt justement un ensemble de valeurs puis il y a tout le temps un écart possible » (RG2, p.30, 1533). Tous les problèmes analysés dans le cadre de cette recherche ont une réponse unique. Aucun problème analysé dans cette recherche ne comporte de choix de réponses ou une plage de réponses. Il est plausible de croire d'un problème ayant plusieurs solutions ou aucune solution soit plus complexe qu'un problème avec une solution. Par contre, les recherches ne sont pas claires sur la complexité de ce critère.

Lors de l'entrevue individuelle, Éric précise que la nature de la réponse sous la forme d'une expression algébrique peut être un critère de complexité. Ainsi, souvent les problèmes contextualisés en algèbre comportent des données numériques et une réponse numérique (par exemple les problèmes *Trouver un nombre*, *Vélo*, *Âge* et *Fromage*). Or, les enseignants ont apporté des problèmes dont les données du problème sont des expressions algébriques comme *Football* et *Poseur de céramique* (voir annexe V, problèmes apportés par Félix). Même si la réponse de ces deux problèmes est de nature numérique, Éric évoque que les problèmes demandant une réponse avec des expressions algébriques sont plus complexes sans apporter d'exemples. De plus, Éric mentionne que les problèmes comportant des expressions algébriques sont les derniers qu'il donne aux élèves lorsqu'il aborde la résolution de problèmes en algèbre comme mentionnée au point 3.3.1.2. Félix ne s'exprime pas sur ce critère même si c'est lui qui a apporté les deux problèmes cités ci-dessus. Les recherches font ce même constat en ce qui a trait à l'obtention d'une réponse algébrique. Booth (1988) souligne que l'expression algébrique en tant que résultat final est une réponse inachevée pour les élèves. De plus, Matz (1982) traite de la difficulté des élèves à donner comme résultat une expression algébrique composée d'au moins deux termes. Dans ce cas de figure, les élèves ont tendance à concaténer, c'est-à-dire regrouper des termes non semblables pour créer un nouveau terme. Par exemple, devant le résultat 2x+3y, les élèves ont tendance à écrire 5xy. Le PFEQ (MELS, 2006) mentionne le paramètre « nature et forme du résultat attendu ». Ainsi, les recherches et le PFEQ (MELS, 2006) s'intéressent au type de réponse obtenu, mais précisent également le format de la réponse (réponse ouverte ou fermée, choix de réponse, vrai/faux) et le nombre de solutions possibles (une seule, un nombre fini, une infinité et aucune).

4.3 GRILLE D'ANALYSE DES CRITÈRES DE COMPLEXITÉ DE PROBLÈMES ÉCRITS EN ALGÈBRE CO-CONSTRUITE ENTRE CHERCHEURE ET ENSEIGNANTS

Lors de la deuxième rencontre de groupe, la chercheure a distribué aux enseignants une enveloppe, celle-ci contenait 30 bouts de papier sur lesquels étaient inscrits les critères de complexité présentés dans la section 4.2. Préalablement, la chercheure avait ressorti dans les propos des enseignants les critères évoqués lors de la rencontre individuelle et de la première rencontre de groupe. Les enseignants devaient organiser ces différents critères sous quelques catégories dont ils devaient choisir un nom significatif. La chercheure a fait également cet exercice. Ainsi, chaque participant a catégorisé les critères pour finalement en arriver à des catégories communes qui ont fait émerger une grille d'analyse des critères de complexité des problèmes écrits en algèbre. Dans cette section, les catégories de chaque participant sont présentées ainsi que la grille d'analyse finale.

4.3.1 CATÉGORISATION DES CRITÈRES SELON LES PARTICIPANTS

4.3.1.1 CATÉGORISATION DES CRITÈRES SELON ÉRIC

Éric a catégorisé en trois groupes les critères de complexité : *Compétence textuelle et de langage*, *Compétence d'analyse mathématique* et *Compétences académiques et personnelles* (voir annexe IX). La figure 15 présente la catégorisation faite par Éric lors de la deuxième rencontre de groupe.

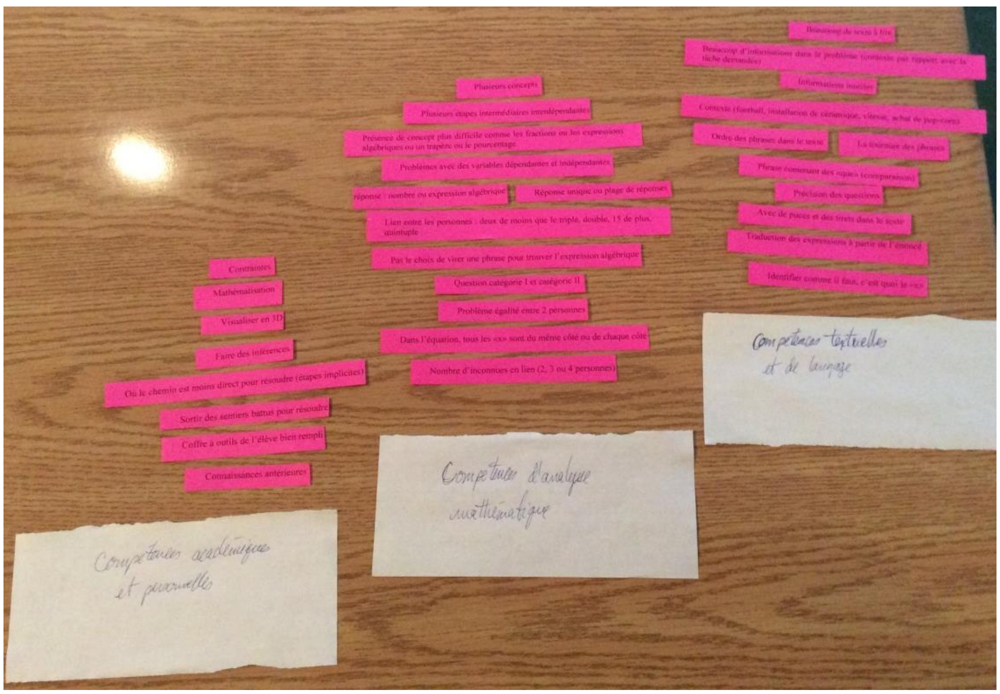


Figure 15 : Catégorisation des critères selon Éric

Éric explique pourquoi il a regroupé certains critères dans la catégorie *Compétence textuelle et de langage* : « Je trouve que ça relève soit du texte soit de la langue. C'est la base aussi du problème. L'élève, il commence par lire le texte, il essaye de décoder un peu ce qu'il a à faire, voir les informations s'il en a qui sont inutiles ou non » (RG2, p.11, 523-525). La catégorie *Compétence d'analyse mathématique* est expliquée comme suit par Éric : « Je trouvais que ça référait au corps du problème en tant tel. C'est sûr que là ça prend plus des lunettes d'enseignants » (RG2, p.12, 581-582). La catégorie *Compétences académiques et personnelles* « c'est un peu la dernière catégorie aussi un peu fourre-tout, mais c'était vraiment, je pense, à la lecture des mots, l'aspect plus général qui m'a fait classer ça ici » (RG2, p.13, 646-647).

4.3.1.2 CATÉGORISATION DES CRITÈRES SELON FÉLIX

De son côté, Félix a regroupé les critères de complexité en trois grandes catégories : *Comment le problème est bâti*, *Connaissances antérieures ou nombre de concepts*, *Construction de la solution* (voir annexe X). La figure 16 présente cette catégorisation.

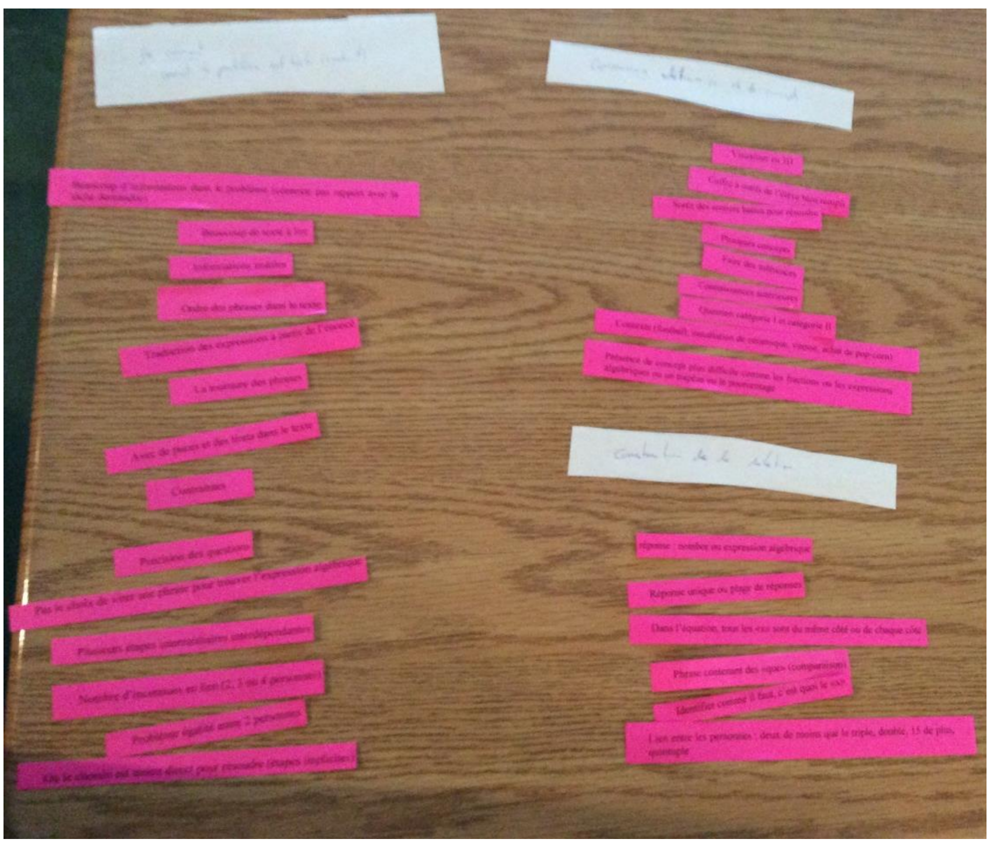


Figure 16 : Catégorisation des critères selon Félix

La catégorie *Comment le problème est construit* est décrit comme suit par Félix : « c'est comment le problème est construit qui va t'aider à savoir comment on va le résoudre » (RG2, p.16, 792). Félix précise que c'est « le contenant ». La catégorie *Connaissances antérieures ou nombre de concepts* « c'est vraiment par rapport à qu'est-ce qui va aider l'élève à résoudre le problème, comment y va faire pour faire sa solution » (RG2, p.17, 867-868). La troisième catégorie *Construction de la solution* c'est « dans le fond qu'est-ce qui va l'aider pour la construction de sa solution, c'est le tout » (RG2, p.18, 893). Après les explications de Félix, Éric a commenté ainsi la catégorisation de Félix : « Moi je dirais que Félix a classé ça de façon fonctionnelle » (RG2, p.19, 970).

4.3.1.3 CATÉGORISATION DES CRITÈRES SELON LA CHERCHEURE

La chercheure, teintée par les lectures menées sur le sujet et qui se matérialisent dans le chapitre II, a catégorisé les critères en plusieurs catégories : *Organisation de l'énoncé, Concepts, Nombre d'étapes, Contexte*, *Type de question/réponse*, *Type de problème et Connaissances de l'élève* (voir annexe XI). Après la présentation de sa catégorisation, Éric émet le commentaire suivant : « Je trouve que tu as beaucoup de catégories » (RG2, p.21, 1070).

4.3.2 CATÉGORISATION CO-CONSTRUITE

La grille d'analyse finale comporte quatre catégories de complexité qui ont été nommées : 1) *Organisation physique du texte*, 2) *Ressources de l'élève*, 3) *Mathématisation* et 4) *Type de problèmes*. Ces quatre catégories sont à considérer dans un ordre précis, comme des couches superposées. Pour débuter l'analyse d'un problème, premièrement, l'*Organisation physique du texte* est scrutée, c'est-à-dire la structure du texte pour déterminer si le problème présente à travers son énoncé des éléments de complexité. Par la suite, un questionnement est mené autour des *Ressources* dont l'élève a besoin pour résoudre le problème. Troisièmement, un regard est porté sur le problème par rapport au travail mathématique à effectuer par l'élève, soit la *Mathématisation*. Finalement, c'est le *Type de problème* qui permet de circonscrire l'analyse de la complexité du problème. Chacune de ces quatre catégories sont définies à travers différents critères qui sont relevés dans le tableau 32 accompagnées d'explications sur l'origine de la complexité relevée.

Tableau 32 : Grille d'analyse de la complexité des problèmes en algèbre co-construit

Catégorie	**Critère**	**Explications de l'origine de la complexité**
Organisation physique du texte	□ Organisation de l'énoncé	□ Longueur de l'énoncé □ Organisation des phrases □ Présence de puces, de tirets, de picots
	□ Informations fournies	□ Présence de données superflues
	□ Nature et place de la question	□ Question interrogative ou déclarative □ Question au début ou à la fin de l'énoncé
	□ Représentation des données	□ En mots □ En symbole □ En schéma □ En graphique □ En tableau □ En table de valeurs
Ressources de l'élève	□ Contexte	□ Contexte plus ou moins connu des élèves
	□ Concepts en jeu	□ Présence d'un concept ou d'un processus difficile □ Combinaison de plusieurs concepts et processus
	□ Capacités de l'élève	□ Capacité de l'élève à transférer ses connaissances □ Capacité de l'élève à faire des inférences □ Capacité de l'élève de visualiser en 3D
Mathématisation	□ Relations entre les données	□ Nature des relations □ Difficulté lors de la traduction de l'énoncé en expressions algébriques □ Difficultés pour la construction de l'équation
	□ Étapes de résolution	□ Présence de plusieurs étapes □ Présence d'étapes intermédiaires indépendantes □ Présence d'étapes implicites
	□ Contraintes	□ Présence de contraintes
Type de problème	□ Structure du problème	□ Problème de type comparaison □ Problème de type taux □ Problème de mise en égalité
	□ Type de question	□ Question d'application □ Question de démonstration, justification, conjecture
	□ Type de réponse	□ Réponse numérique ou algébrique □ Une ou plusieurs réponse (s) possible (s)

4.3.2.1 ORGANISATION PHYSIQUE DU TEXTE

Cette catégorie réfère au texte écrit du problème et a trait à la structure du texte. Les deux enseignants en font mention lors de l'entrevue individuelle (voir le point 4.1) et dans leur catégorisation personnelle lors de la deuxième rencontre de groupe. Dans chacune des catégorisations individuelles, cette catégorie a fait l'unanimité parmi les participants même si elle est décrite avec différents noms (voir annexes IX, X, XI). Félix nomme cette catégorie *Comment le problème est construit*, la chercheure *Organisation de l'énoncé* et Éric *Compétences textuelles et langagières*. Au moment de l'élaboration des catégories, c'est la première catégorie qui a fait consensus. Éric précise : « Je pense que l'*Organisation de l'énoncé*, on ne va pas s'obstiner longtemps » (RG2, p.22, 1106). Éric explique pourquoi cette catégorie devrait se nommer *Organisation physique du texte* : « Je regarde ce qu'on a sorti, ça me semble physiquement lié au texte. Je veux dire c'est le corps physique du texte » (RG2, p.24, 1236-1238). La chercheure résume les mots des enseignants en spécifiant que cette catégorie réfère à l'état de l'élève lorsqu'il voit un problème : « Donc là finalement c'est un peu comment l'élève quand y arrive devant un problème, qui ne l'a même pas lu encore, c'est un peu son émotif là. » (RG2, p.25, 1254-1255). Éric renchérit en disant : « C'est la première impression qu'il a du problème » (RG2, p.25, 1263). Lors de la présentation du problème *Flamme olympique* (voir annexe XIII), Éric a justement exprimé ce que les élèves pourraient ressentir devant celui-ci : « J'ai du texte, j'ai des picots, j'ai un tableau pour telle information que je ne sais pas encore nécessairement [à quoi ça sert]. Le taux de change, un graphique. Il y a énormément de stock qui est donné. Je pense que ça peut faire peur » (RG2, p.45, 2803-2804). Les critères présents dans cette catégorie sont :

- Organisation de l'énoncé du problème (i. longueur de l'énoncé, ii. organisation des phrases, iii. présence de puces, de tirets, de picots)
- Informations fournies (présence de données superflues)
- Nature et place de la question (i. question interrogative ou déclarative, ii. question au début ou la fin de l'énoncé)
- Représentation des données (présence de différents registres de représentation)

4.3.2.2 RESSOURCES DE L'ÉLÈVE

Cette catégorie se rapporte aux connaissances et aux capacités des élèves. Éric dit : « C'est ce avec quoi l'élève arrive » (RG2, p.28, 1447). Félix mentionne que « L'élève vient avec un bagage qui fait qu'un problème va être complexe puis il va être difficile parce qu'il demande tellement des connaissances antérieures » (RG1, p.36-1545-1546). Éric explique : « Je pense que ce qu'on veut dire que ça c'est vraiment personnel à l'élève » (RG2, p.26, 1338-1339); « Il y en a qui ont des forces plus que d'autres, puis c'est ici que ça joue » (RG2, p.13, 664). Éric apporte une nuance, les critères se rapportant dans cette catégorie ne sont pas exclusifs aux mathématiques : « Ça je pense que ce sont des choses qui peuvent s'appliquer à d'autres domaines aussi. […] Ce n'est pas réservé qu'aux maths. […] C'est toutes des choses qui servent en math, mais qui vont sortir ailleurs » (RG2, p.13, 645-653); « Il y a une partie qui peut être réutilisable aussi ailleurs. Ça peut être transférable » (RG2, p.28, 1441). Félix spécifie « que certains élèves vont beaucoup mieux s'en sortir que d'autres » (RG2, p.54, 2765). La plupart des critères ne sont pas présents dans le chapitre II où les critères de complexité issus de la recherche sont ceux faisant référence à l'énoncé du problème. Voici les critères retenus dans cette catégorie :

- Contexte (contexte plus ou moins connu de l'élève)
- Concepts en jeu (i. présence d'un concept ou d'un processus difficile, ii. combinaison de plusieurs concepts et processus)
- Capacités de l'élève (i. capacité à transférer ses connaissances, ii. présence d'inférences, iii. visualisation en 3D)

4.3.2.3 MATHÉMATISATION

La mathématisation réfère à l'entrée dans la partie mathématique du problème : « Mathématisation, il est vraiment en mathématique » (chercheure, RG2, p.28, 1446). Éric explique sa vision de ce critère : « Pour moi, cette catégorie-là dans le fond, c'est vraiment d'éliminer ce qui est du texte et de m'attarder aux concepts mathématiques derrière » (RG2, p.12, 597-598). Félix dit qu'à partir de ce moment, « il y a eu un petit peu d'analyse »

(RG2, p.25, 1248) et l'élève va « se mettre en action » (RG2, p.28, 1415). Éric dit que l'élève « lit et essaye de voir au-delà des lignes un peu ce qu'il a à faire » (RG2, p.36, 1859) et « il est capable de voir un peu l'ouvrage qu'il a à faire, il est déjà capable de construire une partie du chemin » (RG2, p.29, 1491-1492). Éric mentionne à cet effet : « On comprend que l'élève est en train d'essayer de visualiser le chemin finalement » (RG2, p.37, 1896). Voici les critères qui composent cette catégorie :

- Relations entre les données (i. nature des relations, ii. traduction des énoncés est difficile, iii. construction de l'équation pose des difficultés)
- Étapes de résolution (i. présence de plusieurs étapes, ii. présence d'étapes intermédiaires et dépendantes, iii. présence d'étapes implicites)
- Contraintes (présence de contraintes)

4.3.3.4 TYPE DE PROBLÈME

La chercheure résume les mots des enseignants en disant que le *Type de problème* est un choix de problèmes que l'enseignant fait : « Donc c'était vraiment ton intention » (RG2, p.38, 1923). Éric dit : « Moi je pense qu'en le lisant, ce que je veux dire aussi c'est que nous on cherche un peu c'est quoi le modèle du problème derrière » (RG2, p.3, 111-112). Cette catégorie est la dernière lunette à mettre après les trois catégories précédentes pour juger de la complexité d'un problème. Les critères de complexité de cette catégorie sont :

- Structure du problème (i. problème de comparaison, ii. problème de taux, iii. problème de mise en égalité)
- Type de question (i. question d'application, ii. question de démonstration, justification, conjecture)
- Type de réponse (i. réponse de nature numérique ou algébrique, ii. une ou plusieurs réponse(s) possible(s))

Cette catégorie a demandé plus de négociations entre les participants, car elle était opaque au début des rencontres. Dans la catégorisation individuelle, les critères reliés à cette catégorie finale n'étaient pas regroupés ensemble. Selon Félix, un problème de mise en égalité était dans la catégorie *Comment le problème est bâti* et un problème de comparaison dans la *Construction de la solution*. Le problème de taux était écarté par Félix : « Quand je bâtis mon problème, surtout avec des situations proportionnelles, inversement proportionnelles. Je sais que ça existe, mais j'en parle un peu, mais c'est vraiment un concept qui est de secondaire trois » (RG2, p.20, 997-999). Dans la catégorisation d'Éric, les problèmes de mise en égalité et de taux étaient placés dans la catégorie *Compétence d'analyse mathématique* tandis qu'un problème de comparaison (phrases contenant des « que ») était dans la catégorie *Compétence textuelle et de langage*.

> Je reconnais que c'est un problème de ce type-là [mise en égalité], je peux peut-être référer à un modèle que j'ai vu en classe ou un autre problème que j'ai fait puis qu'il était de même. Je l'avais trouvé dur, mais je le reconnais. Tandis qu'ici, « phrases contenant des que » pour moi ça restait plus un défi de langage ou textuel rendu là (RG2, p.12, 634-640).

Lors de la catégorisation co-construite, les enseignants voulaient, à prime à bord, mettre les problèmes de mise en égalité et de comparaison dans *Mathématisation* à cause de la complexité de la compréhension du langage qui demande de traduire en expressions mathématiques. Par contre, pour la chercheure cela relevait d'un *Type de problème*. La chercheure tente de convaincre de faire une quatrième catégorie en rappelant l'activité d'identification des critères de complexité dans les problèmes *Facebook* et *Camp de jour* (voir annexe VI) dont les structures relationnelles sont différentes :

> Vous aviez quand même classé les problèmes, exemple celui de *Facebook* puis celui du nombre de canots [Camp de jour]. Vous ne les aviez pas mis dans la même complexité parce que la structure du problème à l'intérieur était différente. Donc, le *Type de problème* était différent. C'est pour ça que j'aurais eu tendance à la mettre à part. Parce que quand je regarde ces problèmes-là, l'*Organisation du texte* était à peu près la même, la *Ressource de l'élève* était à peu près la même. La *Mathématisation* était à peu près la même chose. La seule chose qui changeait était le *Type de problème* (RG2, p.30, 1519-1523).

Finalement, les enseignants ont accepté de faire une quatrième catégorie. Ils étaient d’accord que la structure du problème était différente, donc c’était autre chose que la *Mathématisation*. Ainsi, les discussions ont permis à chacun de clarifier sa vision et d’argumenter pour défendre son point de vue. L’ouverture d’esprit et le respect des participants ont permis d’arriver à une entente finale dans cette catégorie.

4.4 OPÉRATIONNALISATION DE LA GRILLE

Dans la section précédente, la grille d’analyse co-construite a été décrite en précisant la signification de chacun des critères et de chacune des catégories. Dans cette section, deux problèmes sont analysés en utilisant cette grille, soient des problèmes soumis par la chercheure lors de la deuxième rencontre de groupe. Chaque problème est étudié en reprenant chacune des catégories et les critères qui composent la catégorie. Les critères sont passés en revue, mais seulement ceux pertinents pour l’analyse du problème sont retenus.

Tout d’abord, rappelons que la grille d’analyse est linéaire, c’est-à-dire que l’on doit analyser premièrement l’*Organisation du texte*, deuxièmement les *Ressources de l’élève*, troisièmement la *Mathématisation* et finalement le *Type de problème*. Il n’y a pas de catégories plus de complexité qu’une autre. Une cote qualitative est attribuée à chacune catégorie en termes de complexité (faible +, moyen + + et élevé + + +), ce qui permet par la suite de se prononcer de façon globale sur la complexité du problème.

Premier problème : *Enfants malades*

Sensible à la cause des enfants malades, Eugénie, 7 ans, organise à sa manière une collecte de fonds pour la Fondation de l’Hôpital Sainte-Justine. Elle demande à tous les gens de sa famille et de son voisinage de donner des sous noirs ou des canettes consignées 5 ¢. Après sa collecte, Eugénie constate qu’elle a 3 fois plus de canettes que de sous noirs. Pour la féliciter de son geste, son père lui remet, en argent l’équivalent de ce qu’elle a amassé. Lors de sa prochaine visite à l’hôpital, Eugénie sera fière de remettre 70,08 $ à la Fondation. Combien de canettes et de sous noirs a-t-elle recueillis ?

1) *Organisation physique du texte* :

Dans ce problème, la présence de données superflues (« Eugénie a 7 ans ») augmente la complexité. La sélection des informations utiles dans ce problème s'avère importante, puisque l'élève pourrait se demander comment utiliser cette information. Il y a aussi la longueur de l'énoncé, car certaines phrases ne sont pas nécessaires pour la résolution de ce problème (« Sensible à la cause des enfants malades, Eugénie, 7 ans, organise à sa manière une collecte de fonds pour la Fondation de l'Hôpital Sainte-Justine »). De plus, la représentation des données est sous la forme symbolique (5 ¢ et 70,08 $) et sous la forme de mots (sous noirs). L'élève doit être en mesure de passer du registre de représentation sous la forme symbolique à un autre registre de représentation, soit la notation décimale pour comprendre la tâche à réaliser. Il n'y a pas de puces, tirets ou picots et la question déclarative est à la fin de l'énoncé. Cette catégorie cote le plus fort concernant la complexité à cause de l'*Organisation de l'énoncé* et de la *Représentation des données*.

2) *Ressources de l'élève*

Le contexte fait intervenir des sous noirs ce qui influence la complexité du problème, car les sous noirs ne sont plus utilisés dans la vie quotidienne. Il faut connaître la valeur monétaire d'un sou noir, soit 0,01 $. Ce contexte de la valeur sur la remise d'une consigne d'une canette peut être un critère de complexité pour certains qui n'ont pas cette expérience. De plus, l'élève doit inférer que la moitié de l'argent remis à la Fondation provient de l'argent donné par son père. La mise en équation et la résolution de cette équation sont les concepts et processus en jeu dans ce problème, soit dans le champ de l'algèbre. Cette catégorie cote faiblement complexe.

3) Mathématisation :

Cette catégorie est jugée moyennement complexe à cause des relations entre les données. Ainsi, la construction de l'équation n'est pas évidente parce que le père met le montant équivalent à l'argent amassé et que la valeur monétaire de chacun des objets est en jeu : $2\,(0{,}01x + 3 \cdot 0{,}05x) = 70{,}08$. En effet, la valeur de la monnaie multipliée par la quantité est souvent échouée par les élèves. Leur raisonnement erroné est d'additionner des quantités (au lieu de montant d'argent) quand le tout est égal à un montant d'argent (exemple : $2\ (x + 3x) = 70{,}08$). Il n'y a pas de contraintes et la nature de la relation de comparaison est simple (« 3 fois plus »). De plus, il y a des étapes intermédiaires et implicites dans ce problème. Par exemple, pour résoudre l'équation il faut tout d'abord construire cette équation, donc une étape est préalable et implicite. Les cinq étapes sont :

1) Trouver le montant remis par son père
2) Identifier les inconnus et les mettre en relation
3) Construire l'équation en combinant la quantité et la valeur monétaire associée
4) Résoudre l'équation
5) Déterminer la quantité de sous noirs et de canettes consignées ramassés

4) Type de problème :

Ce problème est un problème mixte impliquant des relations de comparaison (3 fois plus) et du taux (taux unitaire avec une quantité). La schématisation à la figure 17 représente la complexité de la structure de ce problème. Ce type de problème de taux est considéré le plus complexe par les enseignants. La valeur monétaire et la quantité d'un objet présentent une grande difficulté pour les élèves. Par contre, la question est de type application et la réponse est de nature numérique, ce qui atténue un peu la complexité de cette catégorie. Ainsi, cette catégorie côte moyennement complexe.

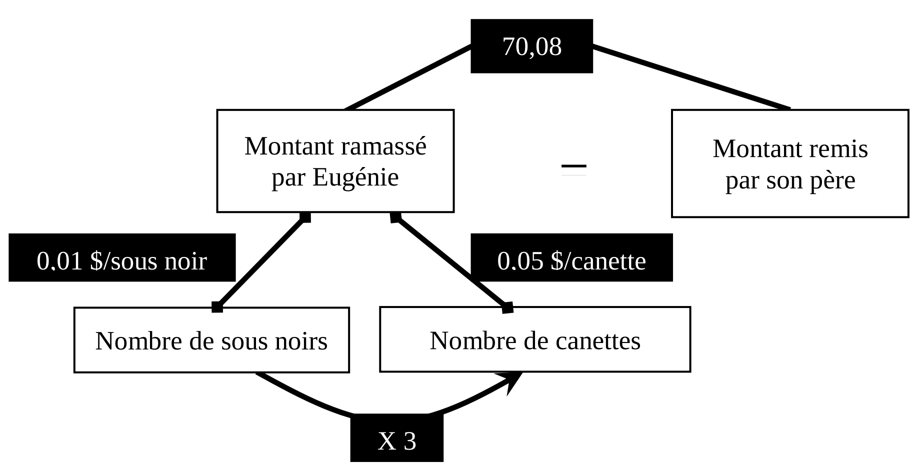


Figure 17 : Schématisation du problème *Enfants malades*

Le tableau 33 dresse une synthèse de l'analyse de la complexité du problème *Enfants malades*. Ainsi, la catégorie l'*Organisation physique du texte* cote la plus complexe, la catégorie *Ressources de l'élève* cote faiblement tandis que la *Mathématisation* et le *Type de problème* cotent chacun moyennement complexe.

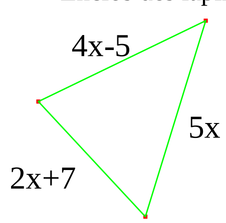
Tableau 33 : Analyse de la complexité du problème *Enfants malades*

Catégorie	**Cote**	**Explications de l'origine de la complexité**
Organisation physique du texte	+ + +	• Données superflues (Eugénie a 7 ans.) • Longueur de l'énoncé (phrases inutiles pour la résolution) • Représentation des données (en symbole (5 ¢) et en mots (sous noirs))
Ressources de l'élève	+	• Contexte (Les sous noirs ne sont plus utilisés.) • Capacité de l'élève (inférence que la moitié de l'argent provient de son père)
Mathématisation	+ +	• Relations entre les données (construction de l'équation) • Étapes de résolution (5 étapes)
Type de problème	+ +	• Structure du problème (mixte : comparaison et taux)

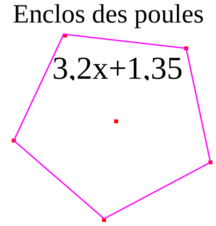
<u>Deuxième problème :</u> *Enclos*

Un fermier possède trois enclos dans lesquels il garde des poules, des lapins et des vaches. Cependant, les derniers hivers ont abimé ses clôtures et il doit les changer. Tu dois déterminer le coût de réparation de chacun des enclos.

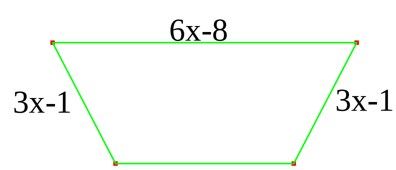
Enclos des lapins



Enclos des poules



Enclos des vaches



- La mesure du côté manquant de l'enclos des vaches est la différence entre le périmètre de l'enclos des poules et des lapins.
- Le périmètre total des trois enclos est de 443 mètres.
- La clôture se vend 5 $ pour 2 mètres.

1) Organisation du texte :

L'énoncé est linéaire et comporte des picots dans l'organisation des informations. Dans ce problème, les picots ne désignent pas un critère de complexité, car ils aident à structurer la démarche de résolution. De plus, les données sont représentées sous la forme symbolique (expressions algébriques qui représentent les mesures des côtés de chaque polygone), schématique (dessins de chaque enclos) et en mots. Ces éléments connus des élèves n'apportent pas de complexité au problème. La question est déclarative. Par contre, la place de la question peut complexifier le problème puisqu'elle n'est pas à la fin de l'énoncé comme les élèves sont habitués. Il n'y a pas de données superflues. Ainsi, cette catégorie cote faiblement complexe.

2) Ressources de l'élève :

La présence de concepts plus difficiles comme la manipulation d'expressions algébriques et la combinaison de plusieurs concepts et processus (opérations avec des expressions algébriques, distributivité devant une parenthèse, périmètre, nombres entiers et décimaux, construction d'une équation, proportion) engendrent une plus grande complexité. Ce problème combine la géométrie, l'algèbre et la proportion. Par contre, il y a peu d'inférences et le contexte peut être familier aux élèves sauf la partie où les mesures sont indiquées sous la forme d'expressions algébriques. Il n'y a pas de visualisation en trois dimensions à faire dans ce problème. Cette catégorie cote fortement complexe.

3) Mathématisation :

Cette catégorie cote la plus forte en termes de complexité. La traduction de l'énoncé en une ou plusieurs expressions algébriques ne cause pas de difficulté dans ce problème puisque les expressions algébriques sont déjà inscrites. Il n'y a pas de contraintes dans ce problème. Par contre, la construction de l'équation du périmètre total avec la différence entre le périmètre de l'enclos des poules et celui de l'enclos des lapins n'est pas un élément usuel pour les élèves. De plus, il y a plusieurs étapes intermédiaires interdépendantes qui sont pour la plupart implicites :

1) Trouver l'expression algébrique du périmètre de l'enclos des poules
2) Trouver l'expression algébrique du périmètre de l'enclos des lapins
3) Trouver l'expression algébrique de la différence entre l'enclos des poules et celui des lapins pour trouver la mesure manquante de l'enclos des vaches
4) Trouver l'expression algébrique du périmètre de l'enclos des vaches
5) Construire l'équation du périmètre total
6) Trouver la valeur de l'inconnu
7) Calculer le périmètre de chaque enclos
8) Calculer le coût de chaque enclos

4) Type de problème :

La réponse finale a une seule réponse de nature numérique, mais les étapes intermédiaires sont de nature algébrique ce qui influence la complexité du problème. C'est une question d'application où la structure du problème relève plus de la géométrie ce qui n'apporte pas une grande complexité, donc elle cote faiblement.

Le tableau 34 dresse une synthèse de l'analyse de la complexité du problème *Enclos*. Ainsi, l'*Organisation physique* cote faiblement, les *Ressources de l'élève* et la *Mathématisation* cotent fortement et finalement le *Type de problème* cote faiblement.

Tableau 34 : Analyse de la complexité du problème *Enclos*

Catégorie	**Cote**	**Explications de l'origine de la complexité**
Organisation physique du texte	+	• Présence de picots (démarche séquentielle) • Place de la question (à la fin de l'énoncé) • Représentation des données (en mots, en dessin des enclos, en symboles)
Ressources de l'élève	+ + +	• Concepts en jeu (concepts difficiles comme la manipulation d'expressions algébriques et la combinaison de concepts, opérations avec des expressions algébriques, distributivité devant une parenthèse, périmètre, nombres entiers et décimaux, construction d'une équation, proportion)
Mathématisation	+ + +	• Construction de l'équation (périmètre total avec la différence entre le périmètre de l'enclos des poules et celui de l'enclos des lapins) • Étapes de résolution (8 étapes de résolution, plusieurs étapes interdépendantes et implicites)
Type de problème	+	• Type de réponse (une seule réponse de nature numérique, mais certaines réponses aux étapes intermédiaires sont de nature algébrique)

En résumé, les deux problèmes précédents sont complexes, mais les critères qui teintent cette complexité ne sont pas les mêmes d'un problème à l'autre. Ainsi, il est difficile de se prononcer sur lequel des deux problèmes est le plus complexe. Le tableau 35 regroupe les catégories ainsi que les critères de complexité retenus pour les deux problèmes analysés.

Tableau 35 : Opérationnalisation de la grille avec deux problèmes

Catégorie	**Enfants malades**	**Enclos**
Organisation physique du texte	+ + + Organisation de l'énoncé Informations fournies Représentation des données	+ Organisation de l'énoncé Place de la question Représentation des données
Ressources de l'élève	+ Contexte Capacités de l'élève	+ + + Concepts en jeu
Mathématisation	+ + Relations entre les données Étapes de résolution	+ + + Relations entre les données Étapes de résolution
Type de problème	+ + Structure du problème	+ Type de réponse

L'intention de la grille d'analyse co-construite (voir tableau 30) est d'avoir recours à des critères qui peuvent influencer la complexité d'un problème. Ces critères ont été construits à la suite de discussions entre les participants, donc cette grille est validée par eux. Lors des deux rencontres de groupe, les critères de complexité ont été discutés, reformulés, mis à l'essai dans des problèmes. Ainsi, l'objet de recherche qui rejoint une préoccupation commune des participants est redéfini en cours de route en maillant les expertises des différents participants. Pour mieux comprendre comment s'opérationnalise ce processus de co-construction, un épisode qui est riche en ce sens est présenté dans la section 4.5.

4.5 PROCESSUS DE CO-CONSTRUCTION ENTRE ENSEIGNANTS ET CHERCHEURE : UN EXEMPLE

La recherche collaborative invite les participants à co-produire autour d'un objet de préoccupation commun. Dans le cadre de cette recherche, l'activité réflexive mise en place a suscité des discussions entre les participants qui ont abouti à la production d'une grille d'analyse de problèmes écrits en algèbre (voir tableau 30). Dans cette section, un épisode est rapporté où les critères de complexité émergent de l'analyse de problèmes proposés par la chercheure et permet d'exemplifier le processus de co-construction autour d'un critère de complexité et de saisir la négociation entre les participants.

L'épisode choisi se situe dans la première rencontre de groupe, soit lors de l'analyse autour de l'activité de classement de six problèmes du test écrit (voir annexe I). Ces problèmes ont été soumis à des élèves de deuxième année du secondaire quelques mois auparavant. La chercheure demande aux enseignants de classer les problèmes par ordre de complexité de façon individuelle, une mise en commun est par la suite prévue. La chercheure a procédé à une analyse des productions des élèves pour chacun de ces problèmes relevant des raisonnements significatifs, les erreurs et difficultés qui ressortent ainsi que le taux de réussite pour chacun de ces problèmes (voir annexe II). Une fois l'ordre de complexité de ces six problèmes établi par chaque enseignant et discuté en groupe, la chercheure montre ces résultats pour appuyer ou confronter ou enrichir des éléments ressortis dans la discussion. Rappelons que les problèmes du test écrit étaient différents principalement dans leur *Structure relationnelle*.

Cet épisode présente des temps d'argumentation autour de la complexité de certains problèmes, car les deux enseignants n'avaient pas classé les problèmes avec le même degré de complexité ni pour les mêmes raisons. Ces moments de *désaccords* sont riches au niveau de la discussion, les enseignants ayant recours à divers critères pour appuyer leur choix. Il est intéressant de noter que parfois les enseignants étaient en accord sur la complexité des problèmes et sur d'autres problèmes leur vision divergeait. C'est dans ces moments de désaccords que la négociation naît et que l'objet de recherche s'enrichit. L'analyse fait émerger des arguments sur lesquels s'appuient les enseignants qui sont de différentes natures : 1) des arguments qui s'appuient sur l'impression qui se dégage à la suite de la lecture du problème; 2) des arguments qui reposent sur des critères mathématiques liés à l'énoncé du problème; 3) des arguments qui sont liés au travail mené avec les élèves.

4.5.1 LES ARGUMENTS REPOSANT SUR L'IMPRESSION QUI SE DÉGAGE À LA SUITE À LA LECTURE DU PROBLÈME

Une discussion s'ensuit dans laquelle les enseignants comparent les problèmes *Coquillages* et *Musique*. Éric considère *Coquillages* comme le problème le plus simple alors que Félix a choisi le problème *Musique*. Éric justifie son choix comme suit : « Je ne l'ai pas trouvé évident quand je l'ai lu [*Musique*]. Je n'ai pas trouvé « toc ». Alors que *Coquillages*, tu lis ça [haussement d'épaules]. C'est beau » (RG1, p.14, 594-595). Les propos d'Éric soulignent un senti qui émerge en lisant le problème, une première impression reliée à un sentiment de confort, à une facilité qui se dégage du problème. Ce senti fait en sorte qu'Éric juge, à raison, le problème *Coquillages* comme le plus simple des six problèmes proposés. À l'inverse, une impression d'inconfort peut naître à la lecture d'un problème comme à la lecture de *Destination de vacances* : « Parce que quand tu le lis, tu fais « hein ?! » (Éric, RG1, p.16, 662). Ce problème est en effet un des problèmes les plus complexes. Toutefois, l'enseignant précise que cette première intuition qui se dégage suite à la lecture du problème peut être trompeuse.

En effet, développer un regard critique sur l'impression de simplicité qui se dégage en lisant le problème est important. L'analyse du problème *Souvenirs* vient appuyer les propos d'Éric. Les problèmes *Souvenirs* et *Coquillages* impliquent des relations de comparaison, mais leurs enchaînements sont de type puits pour *Souvenirs* et de type composition pour *Coquillages*. Le problème *Souvenirs* est donc beaucoup plus complexe que le problème *Coquillages*. Parmi les 25 élèves, seul un élève arrive à résoudre ce problème ce qui confirme ce qui est présenté par Bednarz et Janvier (1994). Éric s'est laissé prendre par l'impression de facilité qui se dégage du problème *Souvenirs*, car il reconnaît un problème impliquant des relations de comparaison. Ce qui n'est pas le cas de Félix qui le considère comme un problème complexe, car il faut que l'élève trouve qu'elle est l'inconnue la plus efficace et qu'il applique des relations inverses à bon escient :

> Puis là on compare le gilet par rapport au bracelet. Mais merde, le *x* ! […] Je vais mettre le *x* à la tasse, mais non je ne peux plus parce que si je le mets à la tasse je vais avoir deux variables. Donc, je n'ai pas le choix de mettre *x* au bracelet […] Puis après ça, c'est une tasse, deux bracelets, un gilet. Donc, là il faut que tu prennes tout ça et que tu remettes ça pour que ça égal à 60. (RG1, p.17, 713-729)

En effet, une des difficultés dans la résolution de problèmes de type puits est que l'élève voit deux inconnues et est bloqué lors de la mise en équation, car il obtient une équation à deux inconnues. Félix procède à une analyse des problèmes impliquant des relations de comparaison en se questionnant sur la nécessité d'inverser les relations pour résoudre le problème. Cette approche lui permet d'analyser de façon adéquate les problèmes impliquant des relations de comparaison. Éric explique les raisons qui l'amènent à penser que le problème *Souvenirs* est simple, mais concède finalement qu'il a peut-être sous-évalué la complexité du problème.

> Il faut que l'élève cherche, il ne sait pas c'est lequel le *x*. Mais tu peux transformer facilement « un gilet coûte trois fois plus cher qu'une tasse », donc une tasse coûte trois fois moins cher qu'un gilet. Ça fait que je pense que tu peux t'en sortir de même. Mais j'avoue qu'à 2 [Éric trouvait que ce problème était le deuxième problème le plus simple], j'ai peut-être coté faible un peu […] **Oui, j'avoue il est plus difficile que j'ai pensé** (RG1, p.17, 717-729).

Éric considérait le deuxième plus complexe le *Parc d'amusement* tandis que Félix considérait ce problème le deuxième plus simple. Félix argumente pour démontrer que ce problème n'est pas si complexe. Éric est finalement d'accord avec Félix et concède que ce problème n'est pas très complexe : « C'est correct. Je me suis laissé avoir peut-être » (RG1, p.17, 704). Donc, après que chacun ait argumenté sur la complexité du problème, ils se sont ralliés pour définir que ce problème était plus complexe que ce que pensait Éric au départ.

4.5.2 LES ARGUMENTS REPOSANT SUR DES CRITÈRES MATHÉMATIQUES

Tel que présenté précédemment, les discussions autour du classement des six problèmes amènent à faire émerger des critères de complexité reliés à l'énoncé du problème. En effet, Félix procède à une bonne analyse des problèmes impliquant des relations de comparaison. C'est un des apports importants que Félix amène dans les discussions autour des critères de complexité. Quand la chercheure propose une autre activité qui repose sur une analyse des problèmes retenus dans un article de recherche (voir annexe VI), les objectifs espérés ne sont pas atteints. En effet, la chercheure a choisi cette activité pour travailler les critères de complexité reliés aux différents enchaînements dans les relations de comparaison. Les problèmes sélectionnés permettaient de faire ressortir ce critère. Précédemment, Félix explicite une analyse de ce type de problème qui repose sur un questionnement sur la nécessité d'inverser les relations de comparaison ce qui permet aux deux enseignants d'ordonner les problèmes impliquant des relations de comparaison de façon convenable. Félix est également sensible à la traduction en symboles des relations de comparaison : « le fois quatre il va à qui ? » (RG1, p.13, 555) dans le problème *Coquillages*, « par heure faut l'enlever à qui ? » (RG1, p.15, 630) dans le problème *Destination de vacances*. Il explicite qu'il fait des gestes avec les élèves pour leur faire voir qui en a le plus, qui en a le moins et déduire ainsi lequel il faut multiplier.

L'apport d'Éric est autre dans l'activité de classement des six problèmes proposés par la chercheure. Celui-ci procède à une analyse fine du problème *Destination de vacances* qui est un problème impliquant des taux. Il relève la difficulté dans l'interprétation du concept de vitesse, de vitesse constante, le fait que la vitesse soit inconnue pose de plus des difficultés. L'élève doit se baser sur l'équation vitesse est égale à la distance divisée par le temps pour pouvoir écrire l'équation. L'écriture de l'équation (qui présuppose une mise en égalité implicite) est complexe. Éric apporte également une nuance intéressante en analysant le problème de mise en égalité *Musique*. Il souligne que le fait que la relation de mise en égalité soit donnée au début du problème est difficile pour un élève, car cette relation permet de poser l'équation. L'élève doit donc continuer la lecture du problème pour poser ses inconnues et revenir par la suite au début du problème pour écrire l'équation. Ces allers-retours sont un signe de complexité. Les apports des enseignants sont complémentaires dans cette activité de classement, ce qui rend cette activité si riche.

4.5.3 LES ARGUMENTS REPOSANT SUR LE TRAVAIL MENÉ PAR LES ENSEIGNANTS AVEC LES ÉLÈVES

Les critères de complexité reconnus par les enseignants proviennent souvent de ce qu'ils ont observé dans leur pratique, de ce qu'ils ont pu observer chez leurs élèves. Dans certains cas, les critères de complexité s'appuient sur le fait que l'enseignant n'a jamais observé dans son expérience des élèves capables de poursuivre un raisonnement souhaité. C'est le cas du problème *Destination de vacances* pour lequel Éric dit : « Très difficile! Et je n'ai pas d'élèves qui font ça bien parfaitement. Je pense qu'un élève se lance là-dans fait plus d'essai-erreur que d'autres choses » (RG1, p.15, 656-657). Les critères de complexité relèvent également de ce qu'ils font dans la pratique, de leur choix dans la planification. Ainsi, pour Éric, les problèmes impliquant des relations de comparaison sont un type de problème que les enseignants font souvent avec leurs élèves, donc ceux-ci devraient avoir moins de difficultés puisqu'ils sont travaillés en classe. C'est dans ce sens qu'Éric souligne en analysant le problème *Coquillages* : « Je le trouve plus standard. Donc, on nomme trois personnes, les liens sont bien définis entre les personnes pour un total d'objets » (RG1, p.13, 546-547). Dans le problème *Musique*, les enseignants remarquent que l'équation n'est pas égale à un total comme dans le problème *Coquillages*. Éric mentionne : « Tandis que *Musique*, ta deuxième phrase pour faire l'équation c'est qu'ils ont chacun le même nombre de chansons à ranger » (RG1, p.15, 611-613). Ils s'entendaient tous les deux pour dire que ce problème semble plus complexe pour les élèves que le problème *Coquillages*, car ce n'est pas un type de problème qu'ils travaillent beaucoup avec les élèves.

Ainsi, la grille co-construite prend racine sur les critères de complexité ressortis lors de la rencontre individuelle avec les enseignants et suite à l'activité réflexive menée entre les deux enseignants et la chercheure lors des deux rencontres de groupe. Cette grille s'organise en quatre catégories (Organisation physique du texte, Ressources de l'élève, Mathématisation, Type de problème) où chacune regroupe plusieurs critères qui permettent de se prononcer sur la complexité du problème algébrique à analyser. À partir de nouveaux problèmes, la grille a été opérationnalisée. Cette analyse a permis de modifier et de bonifier la grille. Dans ce chapitre, un exemple de processus de co-construction a été présenté afin de mieux comprendre comment la négociation s'articule lors d'une recherche collaborative.

CHAPITRE 5
DISCUSSION

Les analyses conduites dans le chapitre précédent ont permis de mettre en lumière, d’une part, une grille pour analyser la complexité de problèmes écrits en algèbre, grille qui a été co-construite entre chercheure et enseignants, et d’autre part, de s’attarder au processus de co-construction entre les participants. Ces analyses ont pris place autour d’entrevues individuelles menées avec les deux enseignants et autour de l’activité réflexive mise en place à travers deux rencontres de groupe. Divers moyens ont permis de faire émerger la grille co-construite : 1) une réflexion/discussion autour de problèmes jugés complexes apportés par les enseignants, 2) des activités de classement de problèmes selon leur complexité (problèmes choisis par la chercheure et s’appuyant sur certains critères ressortis dans le cadre conceptuel), 3) une activité de classement des 30 critères ressortis en catégories et 4) une discussion autour de problèmes préalablement choisis par la chercheure pour opérationnaliser la grille co-construite. Les participants ont ainsi pu exprimer des critères pour juger de la complexité en s’appuyant sur divers problèmes. Lorsque les participants s’expriment, défendent leur point de vue et s’entendent sur un objet commun, le produit co-construit est d’une grande richesse et les discussions favorisent le développement professionnel des participants. Les enseignants ont ainsi développé tout le long de cette recherche un regard sur l’analyse des problèmes, ils ont dégagé des critères spécifiques qui leur permettent d’analyser la complexité de problèmes écrits visant l’expression d’un raisonnement algébrique. Du côté de la recherche, la chercheure a été influencée par sa pratique professionnelle de conseillère pédagogique qui accompagne les enseignants en formation continue. Son travail de conseillère pédagogique est dorénavant teinté par l’expérience vécue en recherche collaborative. Dans ce chapitre est proposée, dans une première section, une discussion autour de certains constats tirés du chapitre précédent et liés à la grille d’analyse co-construite entre enseignants et chercheure. Dans une deuxième section est menée une discussion sur les diverses postures adoptées par la chercheure dans cette recherche. Finalement, une réflexion autour du développement professionnel des deux enseignants participants est rapportée.

5.1 RETOUR SUR LA GRILLE D'ANALYSE CO-CONSTRUITE

L'analyse menée dans les sections 4.2 et 4.3 amène trois constats. Un premier constat tourne autour de l'appellation des critères de complexité par les enseignants qui est, des fois, différente de celle utilisée par la recherche. C'est le cas pour les problèmes que les enseignants décrivent par « des problèmes dont l'équation a des inconnues de chaque côté de l'égalité », l'appellation *Mise en égalité* (Tremblay et Saboya, sous presse) ne faisant pas de sens pour eux. C'est également le cas pour les problèmes impliquant des relations de comparaison que les enseignants nomment des « problèmes avec des *que* ». De plus, pour désigner l'enchaînement des relations de comparaison, Bednarz et Janvier (1994) ont distingué, dans les problèmes avec trois inconnues, les problèmes *source*, *composition* et *puits*. Ces appellations n'ont pas eu d'écho chez les enseignants, ces derniers les reconnaissent comme « des problèmes où il ne faut pas inverser les relations de comparaison ou les problèmes où il faut inverser une relation ou deux relations de comparaison ».

En plus, il est à souligner que les recherches recensées au chapitre II rapportent des critères de complexité qui découlent d'une analyse de l'énoncé du problème alors que les enseignants ne distinguent pas le problème de l'élève qui résout ce problème. En analysant un problème, les enseignants s'imaginent les élèves en action, ils se mettent à leur place, ce qui se traduit par la présence de la catégorie *Ressources de l'élève*, qui est la deuxième catégorie traitée dans la grille lors de l'analyse de la complexité d'un problème. Ainsi, au cours des discussions, les enseignants ont donc fait émerger des critères qui ne relèvent pas de l'énoncé d'un problème, donc qui ne sont pas présentés dans le cadre conceptuel du chapitre II. Ces nouveaux critères ont requis un retour dans la littérature pour tenter de les appuyer avec des écrits scientifiques. Cela a été possible pour les catégories *Organisation* *de l’énoncé*, *Contraintes*, *Nature et place de la question* et *Capacités de l’élève*. De cette façon, des nouveaux chercheurs ont été cités dans le chapitre IV et qui sont absents du cadre conceptuel comme Houdement (2003, 2011), Fayol (1990) et Booth (1998).

Un deuxième constat est que pour les enseignants, il n’y a pas de catégorie plus complexe qu’une autre dans la grille d’analyse co-construite. Les catégories sont des couches qui se superposent et qui augmentent la complexité d’un problème. Ainsi, la grille co-construite dans cette recherche n’est pas composée de critères uniques, distincts et qui sont mutuellement exclusifs. Elle regroupe des critères qui s’entrecoupent. C’est le cas du critère *Organisation de l’énoncé* pour lequel les enseignants soulignent la présence de puces et de tirets et mentionnent que ceux-ci sont les signes de la présence possible de *Contraintes,* lesquelles relèvent d’un autre critère de la grille. C’est le cas également lorsque les participants identifient un problème impliquant des relations de comparaison (ce qui a trait au critère *Type de problème*). Ils se questionnent en même temps sur la complexité de la nature des relations et anticipent la mise en équation de ce problème, éléments qui sont présents dans le critère *Relations entre les données*. Ainsi, les enseignants disent utiliser la grille d’analyse de façon linéaire, mais il en ressort plutôt que celle-ci est utilisée de façon dynamique où l’on juge de la complexité du problème en fonction de critères qui s’influencent les uns des autres même s’ils sont placés dans des catégories différentes.

De plus, lors de l’analyse du problème *Enfants malades,* problème utilisé pour opérationnaliser la grille, certains critères ont été revus et d’autres ont été ajoutés. En effet, dans ce problème, la chercheure a fait remarquer que la donnée représentée sous la forme Z5 ¢ pourrait constituer un critère de complexité, car cette représentation de la valeur d’une canette doit être convertie de manière à adapter l’unité de mesure à l’ensemble du problème, soit 0,05 $. Les enseignants se sont ralliés aux arguments de la chercheure et ont ajouté cet élément dans *Représentation des données*. De plus, ce problème a amené Félix à mentionner qu’il est complexe à cause de la relation entre la valeur monétaire et le nombre d'objets. Il a ainsi fait émerger le critère *Problème de taux* dans la catégorie *Type de problème*. Finalement, les enseignants ont soulevé l'importance de la construction de l'équation dans ce problème, car la mise en équation n'est pas évidente. L'élève doit comprendre que la partie déboursée par le père est égale à celle amassée par Eugénie, donc deux fois le montant d'Eugénie. Si l'on suppose que x correspond au nombre de pièces d'un cent, l'équation de ce problème est : $2\,(0{,}01x + 3 \cdot 0{,}05x) = 70{,}08$. Les participants en sont venus à préciser le critère *Relation entre les données*, dans la catégorie *Mathématisation*. Ainsi, tel que remarqué précédemment, en analysant un problème, les participants se promènent dans les critères de la grille. On peut donc constater que la grille est dynamique. De plus, l'analyse de nouveaux problèmes a mené à un remaniement de la grille, il est possible de supposer que cette grille peut continuer d'évoluer selon les analyses de problèmes menées. Finalement, cette grille a du sens pour les enseignants et la chercheure ayant participé à cette recherche. Serait-ce le cas également pour d'autres enseignants ou chercheurs à qui cette grille serait présentée ou la remanieraient-ils d'une autre façon ? La question reste ouverte.

Un troisième constat peut être soulevé, soit la distinction faite par les enseignants entre les questions présentées par une phrase déclarative et les questions présentées sous la forme interrogative. Les enseignants ne sont pas en mesure de déterminer laquelle est plus complexe, mais ils y détectent une différence en termes de complexité. Ce critère n'est pas mentionné dans les recherches portant sur la complexité des problèmes écrits, il serait intéressant de se pencher de plus près sur ce senti des enseignants. Autre élément, les enseignants ont soulevé que les données d'un problème peuvent être des expressions algébriques ce qui entraîne généralement une réponse de nature algébrique. Ce critère de complexité n'est pas recensé dans les recherches.

5.2 RETOUR SUR LA MÉTHODOLOGIE : RÔLE DE LA CHERCHEURE DANS LA RECHERCHE COLLABORATIVE

Dans le cadre des activités professionnelles de la chercheure qui est, rappelons-le, conseillère pédagogique, le choix d'utiliser la recherche collaborative est approprié. En effet, le rôle d'une conseillère pédagogique est de prendre en compte la voix des enseignants pour les accompagner dans leur développement professionnel. La considération des résultats des recherches en didactique et en pédagogie est un atout qui ne peut qu'enrichir la pratique du conseiller pédagogique. Ainsi, la recherche collaborative est un prolongement naturel du travail de conseillère pédagogique de la chercheure.

Dans la section 3.1.1, une réflexion a pris place quant au rôle de la chercheure dans cette recherche collaborative. Avant toute expérimentation, la chercheure souhaitait adopter le rôle décrit par Corriveau (2013) dans sa recherche doctorale : « Mon rôle est de favoriser et d'accompagner l'explicitation des manières de faire, des circonstances qui font que les mathématiques sont faites de cette façon » (p.86). La chercheure souhaitait ainsi rendre explicites les réflexions des enseignants sans trop influencer les propos des praticiens en jouant ainsi le rôle d'« interprète de la voix des enseignants » (Corriveau, 2013, p.86). Ce rôle a été adopté au cours de l'expérimentation. C'est ainsi qu'émergent les critères de complexité reconnus par les deux enseignants lors de l'entrevue individuelle et lors de la discussion autour des problèmes rapportés par les enseignants qu'ils jugent complexes. Toutefois, l'analyse des discussions lors des deux rencontres de groupe amène à constater que la chercheure prend un autre rôle qui implique une participation plus active de sa part. C'est ainsi que la chercheure fait ressortir, à différentes occasions, des critères de complexité rapportés par la recherche. En effet, lors de la présentation des résultats de Saboya *et al.* (2013), la chercheure veut montrer qu'il existe des différences entre les problèmes de comparaison selon leur enchaînement (source, composition et puits). Dans ses explications, la chercheure s'appuie sur les problèmes du test écrit qui ont été analysés avec les enseignants préalablement et sur les propos des enseignants sur ces problèmes pour faire un lien avec ce que dit la recherche :

> Dans le fond, on part toujours d'un [une grandeur ou une inconnue] pour être capable de trouver les autres. Le type, bon ils vont s'appeler *Source*. *Puits*, c'est totalement l'inverse [de source] un peu comme vous me disiez. Donc, au lieu de partir d'une donnée pour trouver les autres, toutes les flèches arrivent à celui-là. C'est ce qu'on va appeler un problème de type *Puits*. C'est beaucoup plus difficile. C'est le même type de problème comme que vous le disiez que celui du *Souvenirs*. Les élèves ne savent pas où mettre le *x*. […] Comme tu le disais Félix c'est de voir l'opération inverse. Donc, si on me dit que tout arrive au soccer, on a qu'à faire les opérations inverses. Donc ici, c'est +98, si je fais -98 puis l'autre aussi, ça devient un problème source. Si j'inverse les deux opérations, ça devient super facile parce que ça devient un problème de type *Source* puis *Source* est considéré comme un des plus faciles. […] Le dernier, c'est les problèmes de type *Composition* alors j'en ai un, j'ai l'autre à partir de l'autre et j'ai le troisième. C'est comme un enchaînement finalement, comme celui du *Coquillages* (RG1, p.30, 1310-1342).

Une autre intervention de la chercheure repose sur son intention d'amener les enseignants à distinguer les différents types de problèmes (comparaison, taux, transformation, mise en égalité). Pour cela, elle s'appuie encore une fois sur les problèmes du test écrit et sur ce qu'ont rapporté les enseignants en lien avec ces problèmes pour faire ressortir certains résultats de la recherche :

> Ce qu'on vient de faire ce sont les problèmes de comparaison. Mais il n'a pas juste des problèmes de comparaison. Alors si on prend le premier, le *Parc d'amusement* alors on va les appeler aussi des ... Bien il y a un peu de comparaison [dans ce problème] parce qu'on dit que c'est la moitié de l'autre, mais il y a aussi « dans le temps », donc on va appeler des problèmes de transformation. Comme tu me disais tantôt [Félix] avec son âge, dans quatre ans. […] Il y a des problèmes de taux donc il y a un nombre d'argent par personne, donc il y a des taux. Donc ce type de problème-là [problème du *Parc d'amusement*] comporte plusieurs éléments de structure. Donc, il peut y avoir du taux, de la transformation puis de la comparaison. Donc, ça augmente la complexité plus on mélange les types de structure à l'intérieur. Le deuxième [problème *Argent de poche*] donc là on est encore plus dans des problèmes de transformation, mais aussi dans la comparaison parce qu'on dit qu'il y a sept fois par rapport à l'autre. Celui de la *Musique* c'est des problèmes qu'on va appeler de mise en égalité. Vous m'en aviez parlé tout à l'heure. C'est les problèmes où on va avoir une équation qui est égale à une autre équation et pas égale à une constante. […] Le problème de *Destination* bien c'est sûr qu'il y a un peu de transformation parce qu'on dit cette année et l'année précédente, mais c'est surtout un problème de taux (RG1, p.32-33, 1386-1450).

De plus, dans le choix des problèmes proposé aux enseignants lors de la deuxième rencontre de groupe, la chercheure vise à faire émerger des critères de complexité qui proviennent de la recherche et qui l'habitent à la suite du travail mené dans le chapitre II. Ainsi, elle sélectionne des problèmes ayant des critères de complexité non évoqués jusqu'à maintenant afin de voir si ces critères seront retenus par les enseignants. Par exemple, elle propose le problème *Vente d'ordinateurs* qui présente les données en table de valeurs. Les enseignants n'avaient pas soulevé jusqu'à maintenant que le critère *Registres de représentation* pourrait influer la complexité. Ce problème a amené une réflexion chez les participants sur la pertinence de rajouter ce critère dans la grille. Il ressort de ce qui précède que la chercheure choisit des problèmes avec l'intention de faire émerger des critères rapportés dans le chapitre II.

Un autre rôle de la chercheure en recherche collaborative se dégage dans son implication dans l'activité de classement des 30 critères de complexité ressortis lors des entrevues individuelles et de la première rencontre de groupe. Comme les enseignants, la chercheure prend part activement dans le classement de ces critères et discute des choix qu'elle a faits. S'ensuit ainsi une discussion entre les trois participants qui comparent leur classification avec celle des autres. C'est dans le cadre de cette discussion que la chercheure remarque que, dans la catégorisation individuelle des enseignants, les problèmes de taux, de comparaison et de mise en égalité reliés à la catégorie *Type de problème* ne sont pas regroupés ensemble sous un même critère. Selon Félix, un problème de *mise en égalité* se retrouve dans la catégorie *Comment le problème est bâti* et un problème de comparaison dans la *Construction de la solution*. Selon Éric, les problèmes de *mise en égalité* et de *taux* sont placés dans la catégorie *Compétence d'analyse mathématique* (reconnaissance d'un modèle mathématique enseigné) tandis qu'un problème de comparaison (phrases contenant des « que ») est dans la catégorie *Compétence textuelle et de langage* (défi de langage et de traduction). La chercheure tente de les convaincre que ces problèmes devraient tous se retrouver dans la catégorie *Type de problème.* Elle s'appuie pour cela sur des exemples de problèmes discutés précédemment :

> Vous aviez quand même classé les problèmes, exemple celui de *Facebook* puis celui du nombre de canots [problème du *Camp de jour*] puis tout ça. Vous ne les aviez pas mis dans la même complexité parce que la structure du problème à l'intérieur était différente. Donc, le *Type de problème* est différent. C'est pour ça que j'aurais eu tendance à le mettre à part. Parce que quand je regarde ces problèmes-là, l'*Organisation du texte* était à peu près la même, les *Ressources de l'élève* étaient à peu près les mêmes. La *Mathématisation* était à peu près la même chose. La seule chose qui changeait est le *Type de problème* (RG2, p.30, 1519-1523).

Ainsi, les interventions de la chercheure amènent les enseignants à reconnaître une quatrième catégorie, soit *Type de problème*. Les participants ont convenu de faire cette quatrième catégorie, car ils s'accordent entre eux pour dire que la structure du problème peut différer d'un problème à l'autre. La chercheure tenait à cette distinction des problèmes dans la grille d'analyse. Par contre, la chercheure aurait aimé que cette catégorie soit plus étoffée et plus détaillée afin de permettre une analyse plus fine des problèmes. Or, étant dans un groupe où l'on doit trouver un consensus, des négociations ont lieu et ainsi certains éléments de complexité ne peuvent être présents dans la grille si les autres participants n'en voient pas la pertinence. Il y a donc certains deuils à faire.

Pour la chercheure, savoir quand adopter ces différents rôles n'a pas toujours été facile. À quel moment est-il jugé préférable d'intervenir et à quelles occasions faut-il s'abstenir pour laisser émerger les critères des enseignants ? Quelle est la marge de manœuvre d'une chercheure en recherche collaborative ? Quelles sont les interventions les plus fructueuses ? Les réponses ne vont pas de soi. Habituellement, la conseillère pédagogique est vue par les enseignants comme une experte dans son domaine ayant réponse aux différentes problématiques rencontrées par ceux-ci. Dans ce projet, les enseignants ne devaient plus percevoir la chercheure comme une conseillère pédagogique, mais comme une chercheure qui sollicite les enseignants dans le cadre de sa maîtrise. Il faut souligner que son rôle de conseillère pédagogique a influencé la chercheure qui prend à cœur son rôle de formation en favorisant un climat d'échange et un espace réflexif dans lequel les participants ont la même place et la même importance. Par exemple, elle a aimé que les enseignants ne distinguent pas les facteurs liés aux élèves et ceux liés à l'énoncé. Dans le quotidien des praticiens, cette distinction semble impensable et la chercheure n'avait pas analysé les problèmes sous cet angle, soit en prenant en considération l'élève. Ce fait nouveau apporté par les enseignants lui a permis de mieux comprendre la réalité des enseignants et d'en tenir compte dans sa pratique professionnelle. Ainsi, cette recherche a eu un impact sur les façons de faire de la conseillère pédagogique et va teinter ses futures interventions.

5.3 DÉVELOPPEMENT PROFESSIONNEL DES ENSEIGNANTS

L'une des retombées de la recherche collaborative touche au volet réflexion des enseignants sur leur pratique. En effet, la recherche collaborative peut être une occasion de développement professionnel pour les enseignants. Il est plausible de croire que cet objectif a été atteint dans cette recherche puisqu'il est possible de constater que les deux enseignants qui se sont engagés dans ce projet ont évolué au fil des rencontres.

Lors de l'entrevue individuelle, Félix souligne que le motif de son engagement dans cette recherche est la bonification de sa pratique professionnelle tel que mentionné dans le chapitre de la méthodologie (voir le point 3.3.2) : « Toute amélioration que j'apporte chaque année, exemple participer à des rencontres, pour voir justement ce qui pourrait faire changer ou améliorer les choses » (RIF, p.2, 61). À la fin de cette deuxième rencontre de groupe, la chercheure lui demande de s'exprimer sur l'expérience vécue, ce à quoi il répond : « Très formateur. [...] Alors moi, j'aime vraiment ça de se remettre en question par rapport à mon enseignement » (RG2, p.57, 2947).

De son côté, Éric n'avait pas, au début du projet, de grandes attentes. Il y participait pour faire plaisir à la chercheure, pour l'aider dans sa maîtrise en lui apportant son expérience, mais il n'attendait pas en retirer quoi que ce soit. Son attitude change au fil des rencontres, il précise avoir beaucoup apprécié cette expérience et souligne que son implication dans ce projet a été bénéfique pour sa pratique. En effet, au début de la deuxième rencontre de groupe, il mentionne qu'il se sent plus habilité à analyser des problèmes en algèbre : « C'est sûr que si on prend des problèmes de secondaire 2, ceux qu'on a travaillé la dernière fois [première rencontre de groupe], je pense qu'on est capable de voir avec ce que tu nous as présenté, de trier plus aisément. Ça c'est clair » (RG2, p.2, 75-77). À la fin de la deuxième rencontre, la chercheure lui demande de préciser les possibles apports de cette recherche dans sa pratique professionnelle et de s'exprimer sur les rencontres vécues :

> Bien moi, j'ai aimé ça. Ça ne m'a pas déplu. […] J'ai aussi accepté dans cette veine parce qu'après 14 ans, bien un moment donné il y a juste toi qui regardes ton travail. Je pense que c'est bon de nous faire voir ailleurs. Tu nous questionnes dans un sens sur des choses qu'on fait comme je te le dis intuitivement. On a peu le temps de faire ça. Je pense que ce n'est pas mauvais de le faire du tout (RG2, p.57, 2936).

De plus, lors de la première rencontre de groupe, pendant la discussion autour du critère *Organisation du texte*, Éric propose de jouer sur les variables didactiques[21] d'un problème pour teinter la complexité d'un problème : « On pourrait prendre un problème simple comme on a fait beaucoup avec eux, modifier le texte et ça pourrait créer des difficultés » (RG2, p.3, 110-111). Il est intéressant de noter que les enseignants se penchent sur l'analyse d'un problème en termes de complexité, mais qu'ils se sentent également capables de partir d'un problème et de le simplifier ou de le complexifier selon certains critères, ce qui est un travail bien différent. Finalement, lors de la deuxième rencontre de groupe, les deux enseignants affirment à l'unanimité qu'ils ont « aimé classer les problèmes ».

[21] Selon Brousseau (1982), une variable didactique réfère à des modifications choisies d'un problème par un enseignant. Lorsque l'enseignant joue avec les variables didactiques, il modifie les stratégies de résolution des élèves, donc devient propice à créer de nouveaux apprentissages.

Un autre aspect qui ressort de l'analyse menée dans le chapitre IV est que les enseignants analysent les problèmes en se mettant à la place de l'élève. En sachant que les enseignants tiennent compte de l'activité de l'élève dans l'analyse de la complexité d'un problème en algèbre, il est important de se pencher sur la possible diversité des raisonnements mis en place par les élèves pour résoudre un même problème. Ainsi, l'activité de l'élève pourrait être enrichie par un travail d'analyse des différentes manières possibles de résoudre les problèmes et des difficultés possibles qui émergent du choix de l'inconnue-génératrice. En effet, les discussions entre les participants amènent à croire que les enseignants semblent penser d'emblée que les élèves utilisent un raisonnement algébrique explicite pour la résolution de tous les problèmes proposés. Les autres types de raisonnements analytiques (raisonnement surplus/part, position réajustée) ou arithmétiques (jeu de nombres, essais systématiques) ne sont explicités ou commentés par les enseignants. On pourrait se demander si les raisonnements *surplus/parts* et *position réaju*stée sont considérés comme des raisonnements analytiques par les enseignants. Une réflexion sur ces divers raisonnements a été amenée par la chercheure lors de la présentation de l'article de Saboya *et al.* (2013), mais qui n'a pas été très approfondie :

> Ils [les chercheurs] ont proposé les mêmes problèmes en secondaire un et en secondaire deux et on voit le taux de réussite et la façon que les élèves ont de résoudre. […] En secondaire un, on voit que les méthodes de résolution sont beaucoup plus diversifiée que si on regarde ceux de deuxième secondaire où la partie la plus foncée c'est la méthode algébrique plus explicite, là où on met les *x* (RG1, p.32, 1367-1372).

Toutefois, lors de la discussion des productions d'élèves dans le test écrit, différents raisonnements d'élèves sont ressortis. Dans le problème *Destination de vacances,* la chercheure mentionne que 14/25 des élèves n'ont pas tenté de résolution. Félix mentionne à ce propos : « Tu sais des fois l'élève peut s'en sortir par essais-erreurs comme *Coquillage*. Si tu n'es pas capable, bien tu fais essais-erreurs. Tu essayes un coquillage par personne, deux coquillages, trois coquillages, puis tu vas y arriver un jour » (RG1, p.25, 1079-1082). Ainsi, Félix reconnaît ce type de raisonnement, mais il ne mentionne pas s'il l'accepterait comme raisonnement. Dans le problème *Souvenirs*, la chercheure présente la production d'un élève qui a utilisé un raisonnement arithmétique de type jeu entre les nombres. Il utilise les relations de comparaison en faisant des essais entre les nombres connus afin de déterminer le coût d'un gilet (voir figure 18). Comme il y a deux bracelets, l'élève multiplie la relation (entre le prix d'un bracelet et d'un gilet) par 2 et trouve 24, elle soustrait par la suite 60 de 24 et trouve 36. C'est un prix qui fonctionne selon lui, donc le raisonnement s'arrête. Les enseignants n'ont pas commenté ce raisonnement ni soulevé s'il était valable pour eux et la chercheure n'a pas eu le réflexe de les questionner à ce sujet, sa lunette étant portée sur les critères de complexité et non sur les raisonnements des élèves.

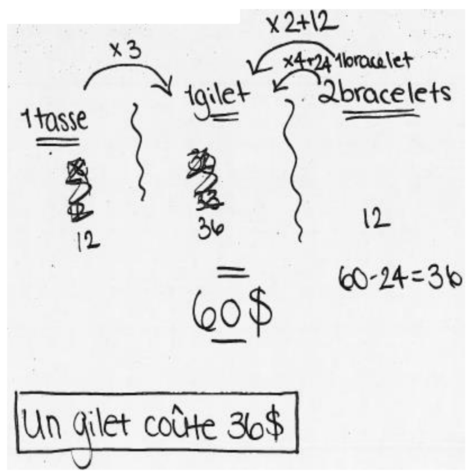


Figure 18 : Production d'un élève dans le problème *Souvenirs*

Force est de constater que les différents raisonnements n'ont pas fait l'objet de discussions. Ce qui serait sujet intéressant à explorer.

Des discussions ont pris place dans les rencontres de groupe quant au choix de l'inconnue génératrice. En effet, une attention doit être portée sur le choix de l'inconnue qui est la plus efficace dans la résolution d'un problème. Il est important de faire remarquer aux élèves que dans les problèmes écrits, il y a un choix de l'inconnue parmi les autres qui sera celle qui permettra de générer les autres inconnues en limitant le risque d'erreurs. Il n'y a pas de mauvais choix, mais il y a des choix qui sont plus efficaces que d'autres. Par exemple, ce choix peut permettre de ne pas se retrouver à calculer avec des fractions qui sont source d'erreurs ou à gérer des parenthèses que les élèves ont tendance, à ce niveau d'études, à oublier. Les enseignants soulignent que le choix *efficace* de l'inconnue comme générateur peut être plus complexe pour certains élèves et pour certains problèmes. Parmi les 30 critères (voir annexe VII), les enseignants le nomment « Identifier comme il faut, c'est quoi le *x* » (dans la catégorie *Relations entre les données*), c'est-à-dire définir l'inconnue qui va permettre de générer les autres inconnues. Par exemple, dans le problème *Enfants malades*, l'inconnue génératrice est le nombre de canettes amassées qui n'est pas un choix évident à faire après la lecture du problème. Une discussion intéressante prend place face au problème *Argent de poche* (voir annexe 1, problème issu du test écrit) pour lequel un élève choisit comme inconnue génératrice l'argent de Michel (voir figure 19) et un autre élève fait un choix tout autre, l'argent de Christine (voir figure 20). Ces deux élèves arrivent à la bonne réponse, mais par une mise en équation différente.

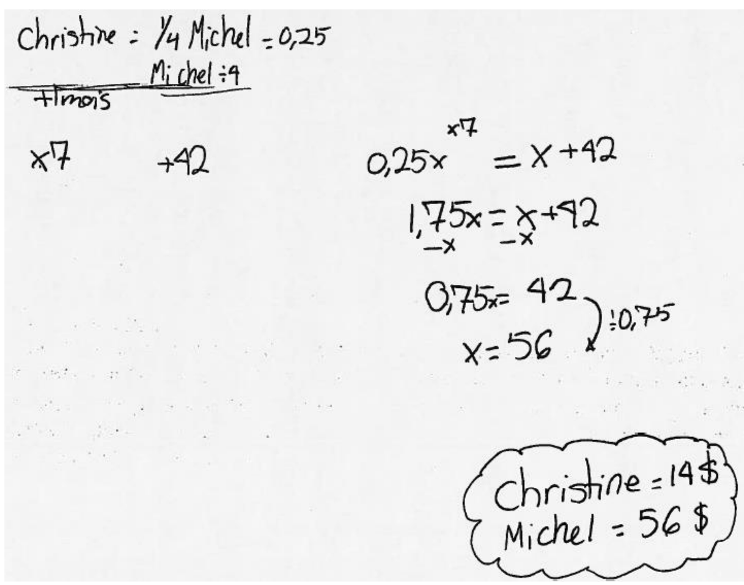


Figure 19 : Raisonnement de l'élève du problème *Argent de poche*

Le choix de cet élève de choisir comme inconnue génératrice l'argent de Michel (voir figure 19) l'amène à utiliser des nombres décimaux (ou des fractions) pour résoudre. Dans le cas de cet élève, ce choix est judicieux, car il maîtrise les calculs avec ce type de nombres. Toutefois, ce choix a été fait par d'autres élèves qui n'ont pas trouvé le bon résultat, ayant fait des erreurs de calcul. Un autre élève (voir figure 20) qui fait ce même choix s'aperçoit que son résultat ne fonctionne pas, l'élève change alors d'inconnue génératrice et choisit l'argent de Christine pour résoudre convenablement ce problème. Cet élève fait preuve d'un contrôle sur le problème, changeant de stratégie en cours de route.

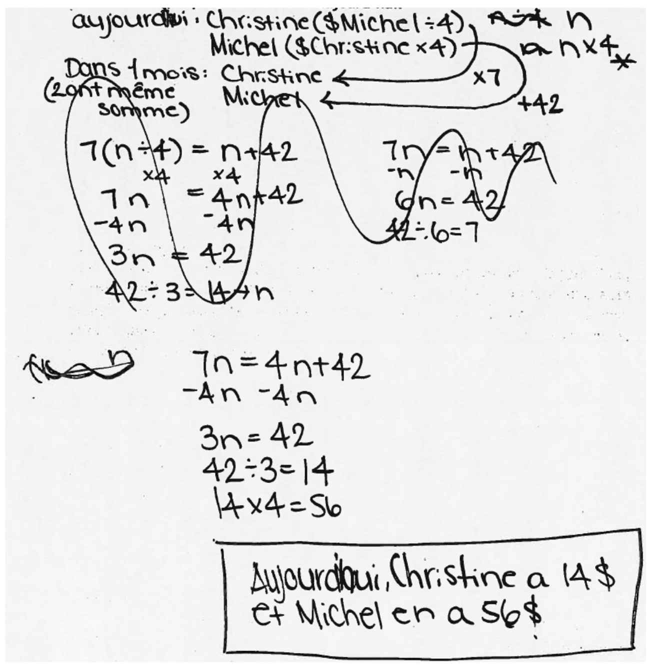


Figure 20 : Raisonnement de l'élève qui modifie son choix d'inconnue génératrice

Ce problème permet de rendre visible que certains choix d'inconnue génératrice ne sont pas efficaces si on a des difficultés à gérer des fractions ou à gérer des parenthèses. Ainsi, pour limiter le risque d'erreurs, le choix stratégique est d'associer l'inconnue qui permet de générer les autres expressions au montant d'argent de Christine, car il n'y a pas de fractions ni de nombres décimaux à gérer. La résolution avec des fractions (ou des nombres décimaux) s’avère une tâche plus complexe qu’avec des nombres naturels. La chercheure souligne : « Je trouvais intéressant de voir qu’on dit souvent aux élèves de mettre le *x* là où on en connaît le moins, mais on voit que les deux méthodes fonctionnent (RG1, p.19, 799-801). Éric renchérit : « Mais ce n'est pas toujours la manière la plus simple » (RG1, p.19, 803).

CONCLUSION

La résolution de problèmes en mathématique occupe une place importante dans les programmes d'étude au Québec et à l'international. L'expérience de la chercheure comme conseillère pédagogique l'a amenée à constater que les enseignants se sentent démunis depuis l'implantation du PFEQ (MELS, 2006). En effet, les élèves semblent éprouver plus de difficultés en résolution de problèmes notamment par l'accroissement de la complexité et de la variété des problèmes proposés. Ce constat est partagé par les participants au Chantier 7 s'intéressant au développement de la pensée algébrique, dans le cadre de la recherche-action dirigée par Mélanie Tremblay (UQAR, responsable) et par Mireille Saboya (UQAM). Ressort ainsi des enseignants et des conseillers pédagogiques le besoin d'avoir un outil permettant d'analyser les problèmes écrits en termes de complexité. Plusieurs critères sont rapportés par les recherches pour permettre de juger de la complexité d'un problème écrit, mais ceux-ci ne prennent pas en considération la voix des enseignants. Cette recherche vise la co-construction entre enseignants et chercheure d'une grille d'analyse permettant de juger de la complexité de problèmes écrits proposés au premier cycle du secondaire en algèbre viable dans la pratique.

Dans le cadre conceptuel, huit critères de complexité provenant de diverses recherches ont été dégagés, certains de ces critères s'intéressent plus précisément à l'algèbre : *la structure relationnelle, le contexte, le type de données fournies, les registres de représentation, le type de réponse, l'activité cognitive, les concepts mathématiques ainsi que le nombre, la nature et enchaînement des tâches*. Le PFEQ (MELS, 2006) rapporte également certains critères de complexité qui ont été, dans cette étude, repris et comparés à ceux provenant de la recherche. C'est ainsi que s'est construit un cadre d'analyse constitué de critères de complexité provenant des recherches et du PFEQ (MELS, 2006).

Une recherche collaborative a été menée entre la chercheure et deux enseignants intervenant depuis plus de sept ans à la deuxième année du secondaire. Celle-ci prend place à travers des entrevues individuelles menées au début du projet et qui permettent de situer chacun des enseignants par rapport à l'enseignement qu'ils privilégient en algèbre et aux critères de complexité qu'ils reconnaissent. À travers deux rencontres de groupe, les participants ont abouti à la co-construction d'une grille d'analyse permettant de juger de la complexité de problèmes écrits en algèbre. Plusieurs activités ont pris place lors des deux rencontres de groupe et qui ont permis l'émergence de cette grille d'analyse. Ainsi, les critères évoqués par les enseignants lors des entrevues individuelles ont servi de prémisse pour l'élaboration des activités vécues lors des deux rencontres de groupe. Les activités sont : 1) une réflexion/discussion autour de problèmes jugés complexes apportés par les enseignants, 2) des activités de classement de problèmes selon leur complexité (problèmes choisis par la chercheure et s'appuyant sur certains critères ressortis dans le cadre théorique), 3) une activité de classement des 30 critères ressortis en catégories et 4) une discussion autour de problèmes préalablement choisis par la chercheure pour opérationnaliser la grille co-construite.

Les objectifs de cette recherche sont :

1) Co-construire une grille d'analyse de critères de complexité pour des problèmes écrits en algèbre à la croisée entre la recherche et la pratique;
2) Comparer les critères de complexité retenus dans la grille à ceux recensés par la recherche.

BREF APERÇU DES RÉSULTATS À TRAVERS LES QUESTIONS DE RECHERCHE

1) *Sur quels critères s'appuient les enseignants pour juger de la complexité les problèmes en algèbre ?*

Lors de l'entrevue individuelle, les enseignants ont évoqué certains critères de complexité. Certains de ces critères sont communs entre les deux enseignants comme la longueur de l'énoncé ou du problème, la traduction de l'énoncé en une ou plusieurs expressions algébriques, les concepts en jeu et le nombre d'étapes ou la longueur de la résolution. D'autres critères sont propres à chaque enseignant comme la présence de tirets, de puces ou de picots dans l'énoncé, la tournure des phrases, la place de l'inconnue dans l'équation, la nature des étapes et la forme de la réponse finale sont spécifiques à Éric. Pour Félix, il évoque la présence de données superflues et le nombre d'inconnues dans un problème. Durant les deux rencontres de groupe, des activités ont été mises en place par la chercheure visant une discussion et une réflexion autour de la complexité des problèmes en algèbre. Trente critères ont émergé qui ont été organisés en 13 critères : *Organisation de l'énoncé, Contraintes, Étapes de résolution, Relations entre les données, Structure du problème, Informations fournies, Nature et place de la question, Représentation des données, Contexte, Concepts en jeu, Capacités de l'élève, Type de question et Type de réponse*. *L'Organisation de l'énoncé* comprend la longueur de l'énoncé, l'organisation des phrases, la présence de puces, de tirets et de picots. Les *Contraintes* à respecter sont un autre critère de complexité. Les participants soulignent que ce critère est surtout présent dans les problèmes de compétence 1, *Résoudre une situation-problème*. Un regard sur les *Étapes de résolution* permet également de se prononcer sur la complexité d'un problème : présence de plusieurs étapes, d'étapes intermédiaires, interdépendantes et/ou implicites. Le critère *Relations entre les données* s'attarde à la nature des relations, au nombre d'inconnues, à la traduction de l'énoncé en une ou plusieurs expressions algébriques et à la mise en équation. Un cinquième critère, la *Structure du problème,* porte sur le ou les types de problèmes en jeu, soit problèmes de comparaison, de taux et/ou de mise en égalité (un même problème peut posséder plusieurs structures : des relations de comparaison, des taux et/ou des relations de mise en égalité). Les *Informations fournies* peuvent, de plus, influencer la complexité d'un problème à cause de la présence de données superflues. Pour le critère *Nature et la place de la question*, il s'agit de prendre en compte la forme de la question (interrogative ou déclarative) et l'endroit où la question est placée (au début de l'énoncé ou à la fin). La *Représentation des données* englobe la présentation des données du problème : en mots, présence de symboles, de schéma, de graphique, de table de valeurs. Un autre critère concerne le *Contexte* : est-il familier pour l'élève ? Le onzième critère a trait aux *Concepts en jeu*, certains causant des difficultés aux élèves comme les fractions. De plus, une combinaison de plusieurs concepts dans le même problème est un autre élément de complexité. Les *Capacités de l'élève* sont définies comme la possibilité pour l'élève de transférer ses connaissances dans un nouveau problème, l'habileté à faire des inférences et/ou de visualiser en trois dimensions. Finalement, le *Type de question* fait référence à la nature de la question (application ou démonstration ou justification ou conjecture). Le *Type de réponse* s'intéresse à la nature de la réponse, numérique ou algébrique, et au nombre de résultats, une ou plusieurs réponses possibles.

2) *Est-ce que ces critères sont reconnus par la recherche ? Et si oui, sont-ils explicités de la même façon ?*

Les 13 critères qui émergent de l'activité réflexive et présentés au point précédent font écho aux recherches dont les apports sont présentés dans le cadre conceptuel (voir chapitre II). De plus, certains de ces critères rejoignent les orientations du PFEQ (MELS, 2006). Le tableau 36 reprend ces différents critères et présente comment ils sont nommés par les différentes communautés, ce qui permet de faire des parallèles.

Tableau 36 : Liens entre les critères des enseignants, des recherches et du PFEQ

Critères des participants à la recherche	Critères de la recherche	Paramètres du PFEQ (MELS, 2006)
Organisation de l'énoncé Longueur de l'énoncé Organisation des phrases Présence de puces, tirets, picots	Longueur du texte (Lajoie et Bednarz, 2016) Organisations lexicale, rhétorique et syntaxique (Houdement, 2003) Ordre des phrases favorise la mathématisation (Bovet, 1978; Antoun, 2012)	Lien interdisciplinaire avec le français (lecture d'un texte, vocabulaire utilisé, syntaxe des phrases)
Contraintes Présence de contraintes	Présence de contraintes en C1 (Lajoie et Bednarz, 2016)	Quantité de contraintes à respecter
Étapes de résolution Présence de plusieurs étapes Présence d'étapes intermédiaires indépendantes Présence d'étapes implicites	Nombre de tâches (Lester,1980; Jonnaert, Pallascio et Peltier, 1990 ; Antoun, 2012) Nature et enchaînement des tâches (Jonnaert, Pallascio et Peltier, 1990; Antoun, 2012)	Quantité et nature des étapes à franchir
Relations entre les données Nature des relations Difficulté lors de la traduction de l'énoncé en expressions algébriques Difficultés pour la construction de l'équation	Nature des relations additives et/ou multiplicatives (Bednarz et Janvier, 1994; Marchand et Bednarz, 1999, 2000) Formulation des relations de comparaison (Bednarz et Janvier, 1994; Saboya *et al.*, 2013) Traduction (Vergnaud, 1988; Lane, 1991; de Serres, 1997, 2003; Rojano, 2002) Nombre d'inconnues (Bednarz et Janvier, 1994)	
Structure du problème Problème de comparaison Problème de taux Problème de mise en égalité	Problèmes de comparaison (Bednarz et Janvier, 1994; Marchand et Bednarz, 1999, 2000; Saboya *et al.*, 2013) Problèmes de taux ((Bednarz et Janvier, 1994; Marchand et Bednarz, 1999, 2000; Guzman, Bednarz et Hitt 2003) Problème de transformation (Bednarz et Janvier, 1994; Marchand et Bednarz, 1999, 2000) Problème de mise en égalité (Tremblay et Saboya, sous presse)	Spécificité des modèles requis
Informations fournies Présence de données superflues	Présence de données superflues (Englert, 1987; Kouba, 1988; Carpenter *et al*., 1989; Muth, 1991; Leon, 1992)	Étendue des données (explicites, implicites, manquantes)
Nature et place de la question Question interrogative ou déclarative Question au début ou à la fin de l'énoncé	Place de la question (Fayol, 1990; Thevenot, Barouillet et Fayol, 2004)	
Représentation des données En mots, en symbole, en schéma, en graphique, en tableau, en table de valeurs	Registres de représentation (Moschkovich, 1992; Duval, 1993; Chazan, 2002 ; Murray, Clermont et Binkley, 2005)	Passages entre des registres de représentation sémiotique Type de registres de représentation sollicités
Contexte Contexte peu connu des élèves	Contexte (Caldwell et Goldin, 1979, 1987; Cotnoir, 2010) Cadres (Douady, 1986)	Degré de familiarité de l'élève avec le contexte
Concepts en jeu Présence d'un concept ou d'un processus difficile Combinaison de plusieurs concepts et processus	Concepts de fractions plus difficiles (Carpenter *et al*., 1980; Kouba,1988)	Étendue des concepts et des processus à mobiliser Nature des liens sollicités entre les champs mathématiques ou entre les concepts d'un même champ
Capacités de l'élève Capacité de l'élève à transférer ses connaissances Capacité de l'élève à faire des inférences Capacité de l'élève à visualiser en 3D	Classement des inférences : pragmatique, sémantique et syntaxique (Houdement, 2011) Sens spatial (Marchand, 2009)	Stratégies à mobiliser pour élaborer une solution Degré d'autonomie exigé de l'élève
Type de question Question d'application Question de démonstration, justification, conjecture	Activité cognitive (Sebrechts *et al*., 1996; Bodin, 2004; OCDE, 2013)	Type des raisonnements à déployer Niveau d'abstraction
Type de réponse Réponse numérique ou algébrique Une ou plusieurs réponse(s) possible(s)	Nature de la question (DeMars, 1998; Sheehan, 1997) Résultat sous la forme algébrique (Matz, 1982; Booth, 1988)	Nature et forme du résultat attendu

Ainsi, les enseignants, au terme de la recherche collaborative, ont exprimé les critères de complexité qu'ils jugent pertinents dans les problèmes écrits en algèbre. Ces critères ont été contrastés avec les recherches et le PFEQ (MELS, 2006). Le tableau 32 permet de faire ressortir que les participants à la recherche reconnaissent essentiellement les mêmes critères de complexité que les recherches et que le PFEQ (MELS, 2006), mais ceux-ci ne sont pas toujours nommés de la même façon. De plus, les recherches vont plus en profondeur dans l'explicitation de ces critères.

3) *Quels sont les critères de complexité retenus après discussion entre enseignants et chercheure ?*

Les critères retenus sont organisés à travers une grille d'analyse co-construite entre enseignants et chercheure. Celle-ci comporte quatre grandes catégories : *Organisation physique du texte*, *Ressources de l'élève*, *Mathématisation*, *Type de problème.* L'*Organisation physique* du texte réfère à la structure de l'énoncé. Cette catégorie regroupe les critères Organisation de l'énoncé, Informations fournies, Nature et place de la question et Représentation des données. Les *Ressources de l'élève* renvoient aux connaissances et aux capacités de l'élève, soit son bagage personnel. Cette catégorie inclut le Contexte, les Concepts en jeu et les Capacités de l'élève. La *Mathématisation* évoque la partie mathématique du problème, soit le modèle requis. Dans cette catégorie, sont compilés les critères Relations entre les données, les Étapes de résolution et les Contraintes. Finalement, le *Type de problème* réfère à la Structure du problème, au Type de question et au Type de réponse. Les enseignants affirment que ces catégories sont des couches de complexité qui se superposent. Ainsi, la grille a été construire pour être linéaire, mais lors de l'opérationnalisation de la grille les enseignants expriment les critères de complexité qu'ils y voient en s'appuyant sur cette grille. Dans ces discussions, on s'aperçoit que les critères s'entremêlent, car certains critères sont liés à d'autres qui sont classés dans une autre catégorie.

4) *Comment se co-construit la grille d'analyse présentant les critères de complexité dans les problèmes écrits en algèbre entre enseignants de 2^e^ secondaire et chercheure ?*

Dans ce travail, un seul épisode a été analysé en termes de co-construction, soit l'activité de classement des problèmes provenant d'un test écrit, problèmes qui ont été proposés par la chercheure à des élèves de deuxième année du secondaire et dont elle en a fait l'analyse. Chaque enseignant a classé en ordre de complexité les problèmes et a argumenté sur les critères de complexité qu'il y voyait. Cette discussion riche en négociations a fait ressortir des arguments sur lesquels s'appuient les enseignants pour expliquer la complexité d'un problème : 1) des arguments reliés à l'impression qui se dégage (au senti qui émerge) à la suite de la lecture du problème; 2) des arguments qui reposent sur des critères mathématiques liés à l'énoncé du problème (exemple, la structure relationnelle); 3) des arguments qui sont liés au travail mené avec les élèves lorsqu'ils planifient ou dans l'enseignement.

LIMITES DE LA RECHERCHE

Une des limites de cette recherche est que celle-ci a été menée avec deux enseignants, elle n'est donc pas représentative des enseignants de 2e secondaire au Québec. En impliquant plusieurs enseignants, la richesse de cette recherche aurait pu être plus grande et aurait peut-être abouti à une grille d'analyse différente de celle co-construite dans ce projet.

De plus, il aurait été intéressant de prévoir plus de trois rencontres (une rencontre individuelle et deux rencontres de groupe). En augmentant le nombre de rencontres, l'analyse des problèmes aurait certainement été plus approfondie. Comme il a été rapporté, l'analyse de nouveaux problèmes (lors de la deuxième rencontre de groupe) a permis d'opérationnaliser la grille co-construite, mais également de la modifier, de la raffiner, un critère de complexité a été ajouté et un autre précisé. L'étude d'autres problèmes aurait pu contribuer à réviser, et donc à améliorer cette grille d'analyse.

Finalement, dans ce mémoire, le travail d'analyse du processus de co-construction (voir le point 4.5) aurait pu être plus étoffé. En effet, un épisode a été présenté pour lequel on retrace la négociation entre les différents participants. Il n'a pas été possible de mener cette analyse plus en profondeur due à l'ampleur de l'analyse menée dans les autres sections du chapitre IV.

RETOMBÉES ET PROLONGEMENTS DE LA RECHERCHE

Il ressort de l'analyse menée que les enseignants sont aptes à classer les problèmes et à argumenter autour de critères qui influencent la complexité d'un problème. Toutefois, le rationnel des enseignants fait état de critères qui s'entrecroisent et qui s'alimentent les uns ou autres. À l'inverse, les recherches tentent d'isoler chaque critère pour les traiter en profondeur, mais par nécessité les enseignants croisent ces différents regards portés sur un problème. Cette recherche collaborative permet aussi d'ouvrir la porte sur de potentiels travaux de recherche collaborative qui permettrait de documenter le travail de planification de l'enseignant en termes de gestion de la complexité au cours d'une année à travers les problèmes proposés. Il est certain qu'un rationnel nourrit les choix des enseignants, mais celui-ci ne semble pas documenté du point de vue de la recherche. En contrepartie, les résultats des travaux en didactique de l'algèbre auraient avantage à être mieux connus des enseignants, non pas dans une perspective d'imposition de ces critères, mais bien comme de potentiels éclairages qui pourraient conduire à un remaniement co-construit d'une planification d'enseignement.

Si l'on revient au principal fruit de la présente recherche, une retombée possible serait de diffuser cette grille d'analyse auprès de plusieurs enseignants de mathématique pour leur permettre de varier les problèmes offerts aux élèves et de mieux outiller ces derniers à faire face à une variété de problèmes. En outre, il pourrait s'avérer adéquat de voir comment cette grille d'analyse est perçue par d'autres enseignants. Est-ce que ceux-ci la modifieraient ou l'organiseraient autrement selon leur expérience ? Même en formation initiale, il pourrait s'avérer pertinent de présenter aux futurs enseignants de mathématique au secondaire une analyse de la complexité de problèmes écrits en algèbre en utilisant cette grille. Tel qu'annoncé plus tôt, il serait pertinent de reprendre la grille co-construite et de la valider en prenant d'autres problèmes comme ceux présentés dans le chapitre *Algèbre* des manuels scolaires de 2^{e} secondaire. Peut-être décèlerait-on d'autres critères porteurs au travail d'analyse.

ANNEXES

ANNEXE I : PROBLÈMES DU TEST ÉCRIT AUX ÉLÈVES

(Les problèmes sont inspirés d'un document élaboré par les commissions scolaires de la Montérégie. Disponible en ligne à : http://vitrine.educationmonteregie.qc.ca/spip.php?article1325)

Parc d'amusement
L'an dernier, une famille composée de trois enfants et de deux adultes ont payé 105 $ pour entrer au parc d'amusement. Le prix d'un billet enfant était la moitié d'un prix d'un billet adulte. Cette année, le prix du billet adulte a augmenté de 20 % et celui pour enfant est resté le même que l'an dernier. Combien payera cette famille pour entrer au parc d'amusement cette année ?

Argent de poche
Christine et Michel font des économies pour partir en voyage. Aujourd'hui, Christine a le quart de l'argent de poche de Michel. Dans un mois, elle aura sept fois le montant de son argent de poche d'aujourd'hui tandis que Michel aura augmenté le sien de 60 $. Si les deux auront la même somme dans un mois, combien chaque personne a-t-elle aujourd'hui ?

Musique
Justine et Yoan préparent des dossiers de musique pour leurs vacances. Ils ont chacun le même nombre de chansons à ranger et ils mettent la même quantité de chansons dans chaque dossier. Après 7 minutes de rangement de chansons, Justine a préparé 20 dossiers et lui reste 8 chansons à ranger. De son côté, Yoan a préparé 18 dossiers et lui reste 11 chansons. Combien de chansons sont placées dans chacun des dossiers ?

Souvenirs
Dans un magasin de souvenirs, Jeanne décide d'acheter une tasse, deux bracelets et un gilet. Elle dépense 60 $ pour ses achats. Un gilet coûte trois fois plus cher qu'une tasse. Le gilet coûte le double du prix d'un bracelet augmenté de 12 $. Combien coûte un gilet ?

Coquillages
À la plage, Anne, Corey et Maude ont ramassé des coquillages. Maude a le quadruple des coquillages d'Anne et de Corey ensemble. Anne a 9 coquillages de plus que Corey. Les trois amis ont 115 coquillages en tout. Combien Anne a-t-elle de coquillages ?

Destination de vacances
Pour se rendre à notre destination de vacances, ma mère roule habituellement pendant 8 heures à une vitesse constante. Cette année, pour économiser de l'essence, elle a décidé de diminuer sa vitesse de 10 km par heure, même si cette diminution exigera une heure de plus pour arriver à notre destination. À quelle distance de notre maison se situe notre destination de vacances ?

ANNEXE II : ANALYSE DES PRODUCTIONS DU TEST ÉCRIT

<u>Parc d'amusement</u>

L'an dernier, une famille composée de trois enfants et de deux adultes ont payé 105 $ pour entrer au parc d'amusement. Le prix d'un billet enfant était la moitié d'un prix d'un billet adulte. Cette année, le prix du billet adulte a augmenté de 20 % et celui pour enfant est resté le même que l'an dernier. Combien payera cette famille pour entrer au parc d'amusement cette année ?

Élève 3 : L'élève a mis son inconnue au prix d'un billet adulte. Il a réussi le problème.

a = prix d'un billet adulte

$[3 \times \underbrace{(a \div 2)}_{0,5a}] + (2 \times a) = 105$

$1.5a + 2a$

$3.5a = 105$

$\div 3.5 \quad \div 3.5$

l'an dernier: $a = 30$ $

enfant : $30 \div 2 = 15$ $

prix adulte cette année: $\frac{20}{100} = \frac{6}{30}$ $\quad 30 + 6 = 36$ $

<u>Total</u>

$(36 \times 2) + (3 \times 15)$

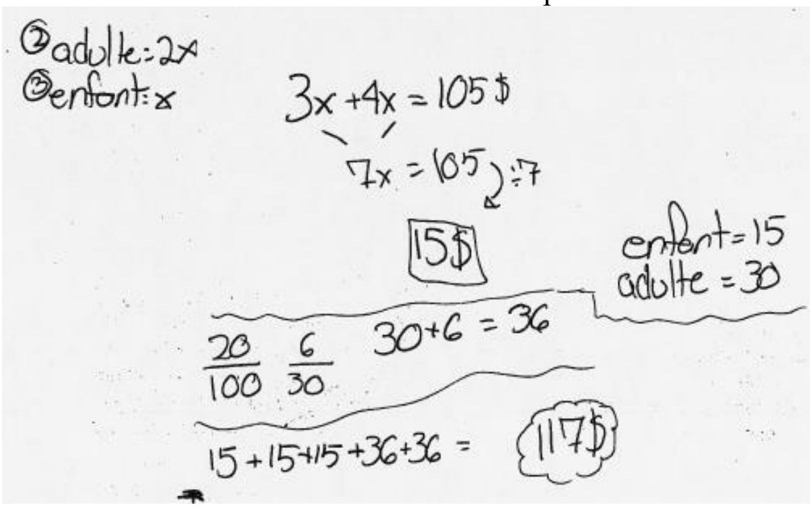
$72 + 45 = 117$ $

$\boxed{117\$}$

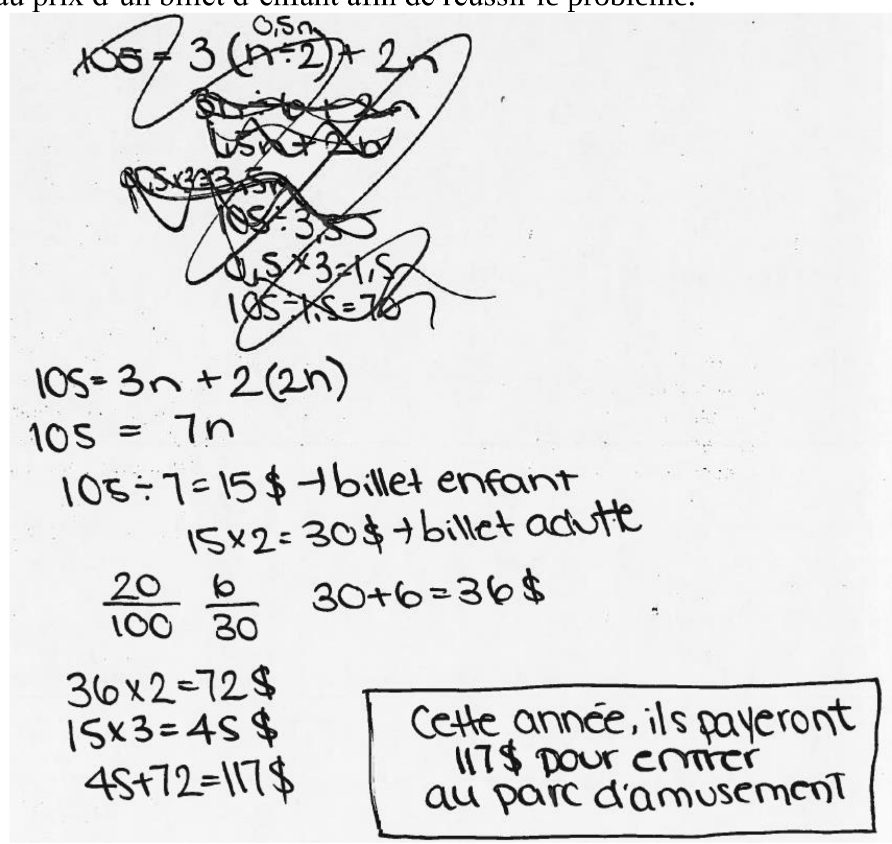
Élève 5 : L'élève semblait incapable de résoudre ce problème lorsqu'il y a présence de pourcentage.

le 20% me mêle toute.

Élève 8 : L'élève a mis son inconnue au prix d'un billet d'enfant. Il a réussi le problème.



Élève 13 : L'élève tente premièrement de mettre l'inconnue au prix d'un billet d'adulte, mais cela lui donne un résultat décimal dû à des erreurs. Par la suite, l'élève met son inconnue au prix d'un billet d'enfant afin de réussir le problème.



Élève 25 : L'élève met son inconnue au prix d'un billet d'adulte. L'élève ne réussit pas le problème puisqu'il additionne 20 $ au prix d'un billet d'enfant au lieu d'additionner 20 %.

an dernier
Billet enfants $\rightarrow \frac{x}{2} \rightarrow 0,5x$
Billet adulte $\rightarrow x$

cette année
Billet enfants $\rightarrow \frac{x}{2} \rightarrow 0,5x$
Billet adulte $\rightarrow x + 20\%$

Calcul de l'an dernier prix

~~0,5 x + x = 105$~~

$3(0,5x) + 2(x) = 105\$$
$1,5x + 2x = 105\$$
$3,5x = 105\$$
$x = 30\$$

l'an dernier, 30$/billets adulte et ~~2,50$~~ 15$/billets enfants

Calcul prix cette année

90$ pour les 3 enfants
100$ pour les 2 adultes
(50$ /billets adultes)

donc cela coûtera 190$ cette année au parc

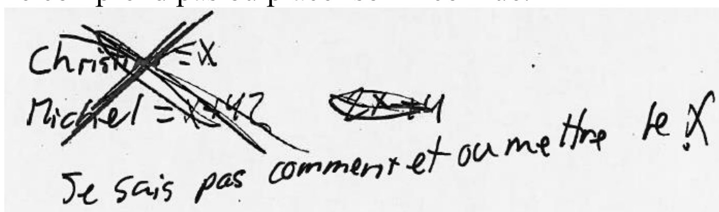
Synthèse

Raisonnement algébrique	Réussi	Inconnue mise au billet enfant	9 élèves (no 2, 4, 7, 8, 13, 14, 16, 20, 26)
		Inconnue mise au billet adulte	1 (no 3)
	Non réussi	Inconnue mise au billet enfant	2 (no 11, 23)
		Inconnue mise au billet adulte	1 (no25 addition 20 $ et non 20 %)
	Ébauche	Inconnue mise au billet enfant	1 (no 9)
		Inconnue mise au billet adulte	1 (no 15)
Raisonnement arithmétique	Réussi		0
	Non réussi		6 (no 1, 10, 12, 18, 22 mauvaise proportion avec 20 %, 24)
Rien			5 (no 5, 6, 17, 19, 21)

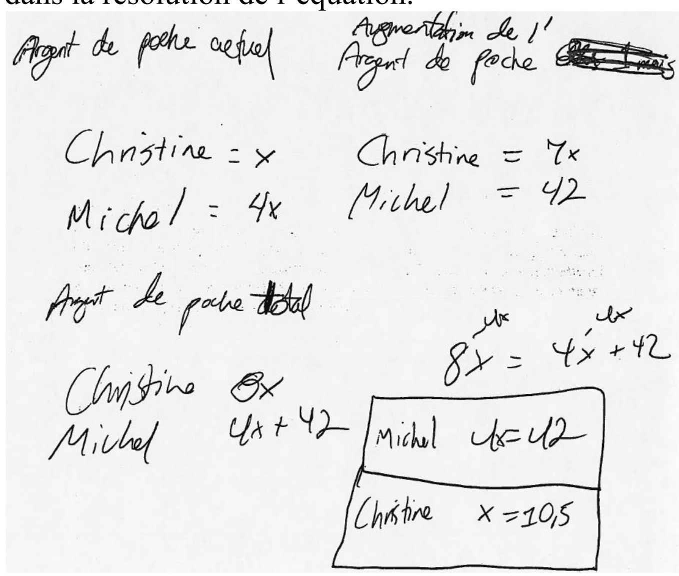
Plusieurs élèves ont placé leur inconnue au prix des enfants, ce qui les force à faire une inférence, car il est écrit la moitié d'un prix adulte. Donc, les élèves doivent comprendre que la moitié d'un prix adulte est équivalente au double d'un enfant.

<u>Argent de poche</u>

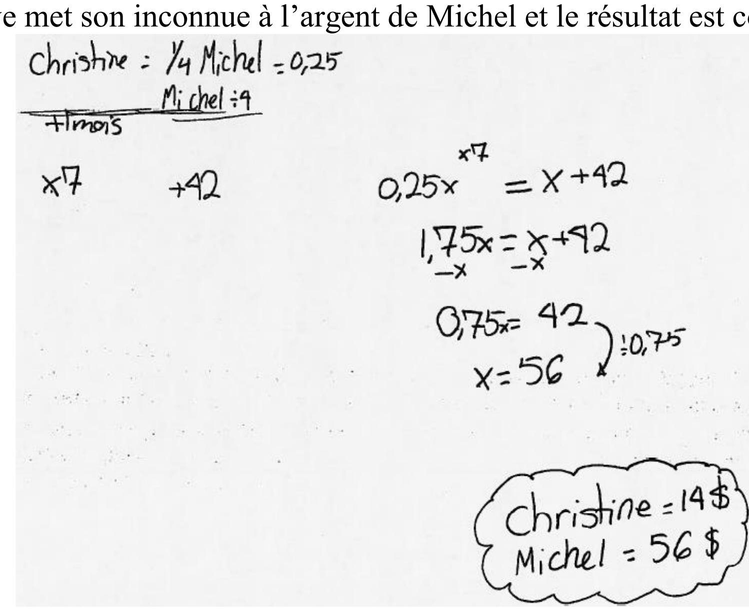
Élève 5 : L’élève ne comprend pas où placer son inconnue.



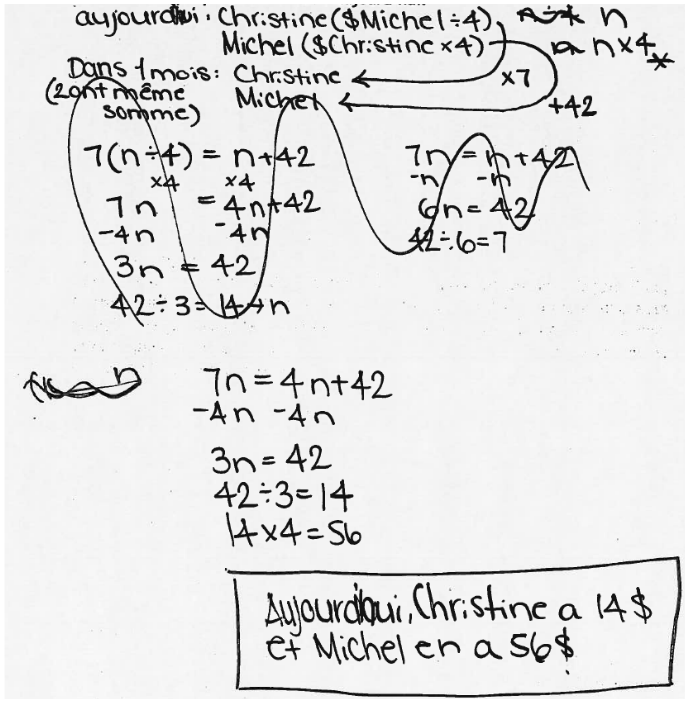
Élève 4 : L’élève met son inconnue à l’argent de Christine. Il ne réussit pas le problème, car il a fait des erreurs dans la résolution de l’équation.



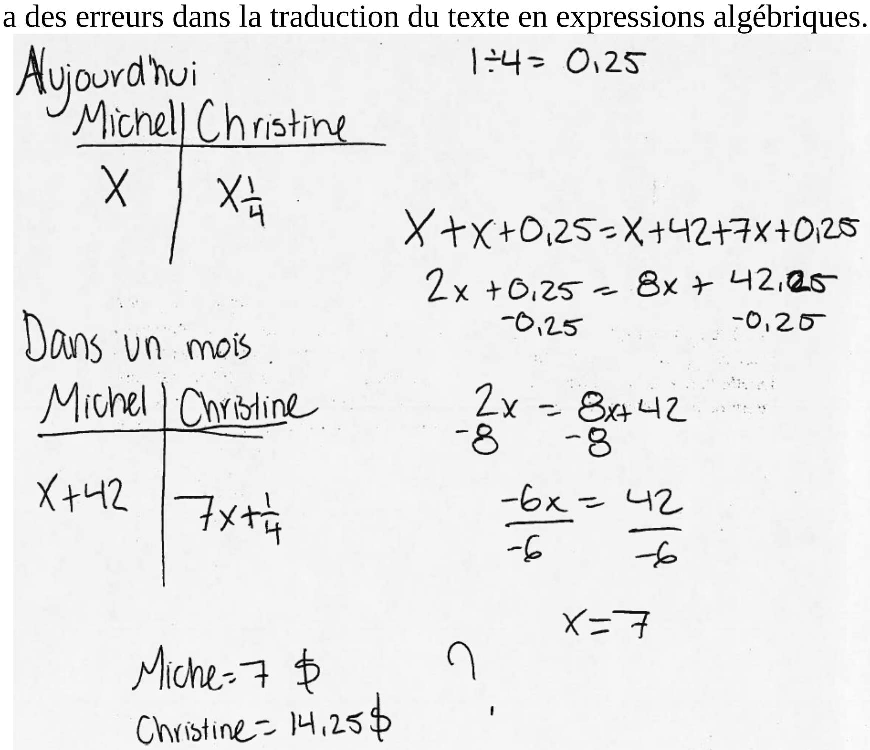
Élève 8 : L’élève met son inconnue à l’argent de Michel et le résultat est correct.



Élève 13 : L’élève tente de placer son inconnue à l’argent de Michel, mais voyant que son résultat de fonctionne pas, il mais finalement son inconnue à l’argent de Christine. La résolution de ce problème est réussi.



Élève 15 : L’élève place son inconnue à l’argent de Michel. Il ne réussit pas le problème puisqu’il y a des erreurs dans la traduction du texte en expressions algébriques.

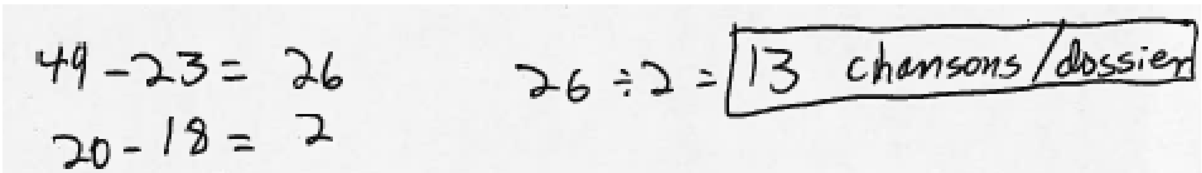


Synthèse

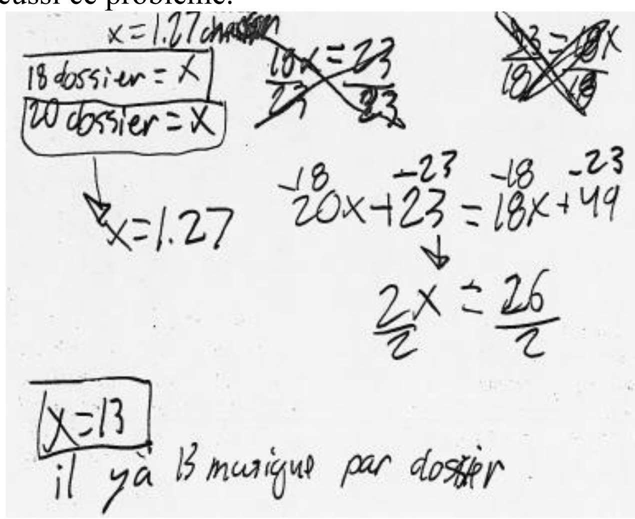
Raisonnement algébrique	Réussi	Inconnue mise à l'argent de Michel aujourd'hui	4 élèves (no 3, 8, 10, 25)
		Inconnue mise à l'argent de Christine aujourd'hui	3 (no 7, 13, 20)
	Non réussi	Inconnue mise à l'argent de Michel aujourd'hui	3 (no 2, 24 expralg, no 15 expralg et équation)
		Inconnue mise à l'argent de Christine aujourd'hui	3 (no 12 expralg, no 4 équation, no 26 pas évalué dans un mois)
	Ébauche	Inconnue mise à l'argent de Michel aujourd'hui	1 (no 6)
		Inconnue mise à l'argent de Christine aujourd'hui	2 (no 5, 11)
Raisonnement arithmétique	Réussi		0
	Non réussi		3 (no 18, 21, 22)
Rien			6 (no 1, 9, 14, 16, 17, 19, 23)

<u>Musique</u>
Justine et Yoan préparent des dossiers de musique pour leurs vacances. Ils ont chacun le même nombre de chansons à ranger et ils mettent la même quantité de chansons dans chaque dossier. Après 7 minutes de rangement de chansons, Justine a préparé 20 dossiers et lui reste 8 chansons à ranger. De son côté, Yoan a préparé 18 dossiers et lui reste 11 chansons. Combien de chansons sont placées dans chacun des dossiers ?

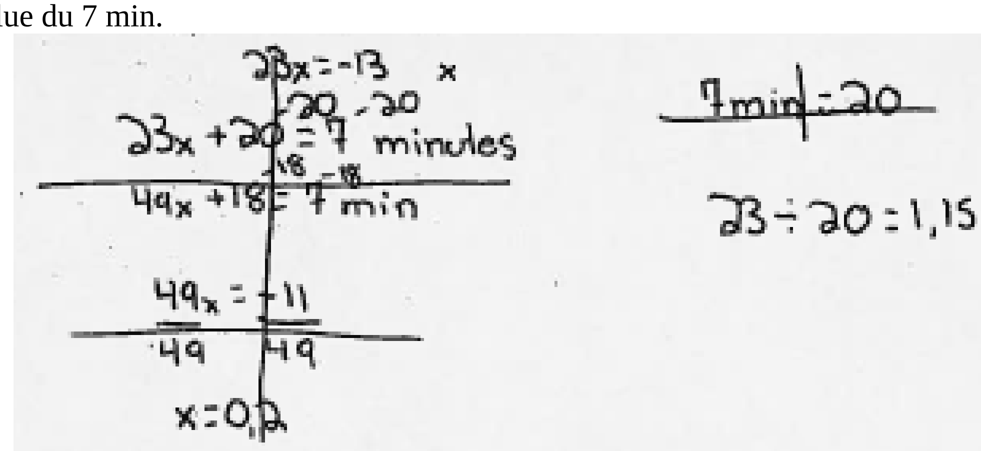
Élève 3 : L'élève n'utilise pas de variable pour résoudre ce problème. Son résultat est correct.



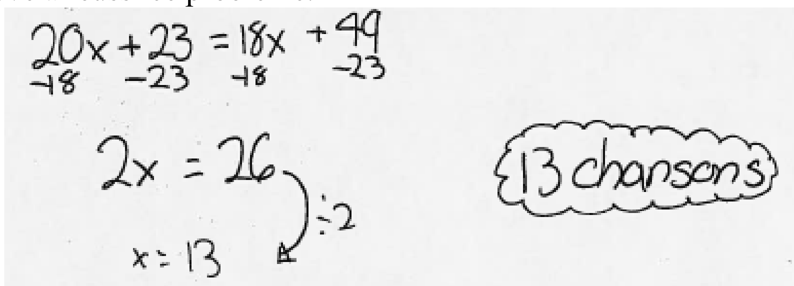
Élève 5 : L'élève a réussi ce problème.



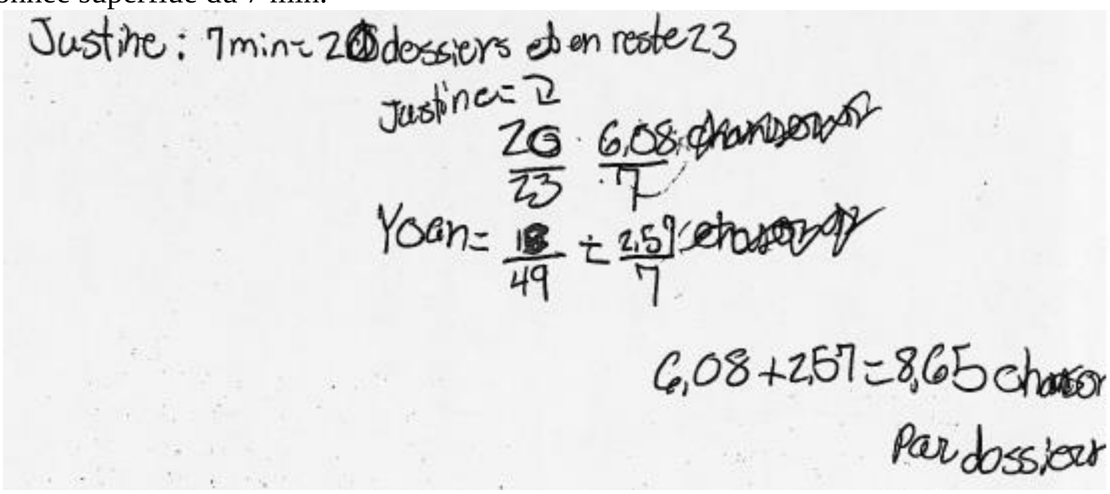
Élève 6 : L'élève n'a pas réussi le problème puisqu'il a introduit dans ses calculs la donnée superflue du 7 min.



Élève 8 : L’élève a réussi ce problème.



Élève 22 : L’élève échoue ce problème tente d’utiliser les proportions en plus d’utiliser la donnée superflue du 7 min.



<u>Synthèse</u>

Raisonnement algébrique	Réussi	7 (no 4, 5, 7, 8, 10, 13, 15)
	Non réussi	2 (cause : no 12 erreur de transcription, no 6 utilisation 7 min + équation)
Raisonnement arithmétique	Réussi	2 (no 3, 25)
	Non réussi	2 (no 20, trouver réponse mais calcule le nombre de chansons de chacun, no 22 mauvaise proportion + utilisation 7 min)
Rien		13 (no 1, 2, 9, 11, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 24, 26)

<u>Coquillages</u>

À la plage, Anne, Corey et Maude ont ramassé des coquillages. Maude a le quadruple des coquillages d'Anne et de Corey ensemble. Anne a 9 coquillages de plus que Corey. Les trois amis ont 115 coquillages en tout. Combien Anne a-t-elle de coquillages ?

Élève 3 : L'élève met son inconnue au nombre de coquillages de Corey. Son résultat est correct.

C = nombre de coquillages de Corey

$$(C+9) + [4 \times (\underbrace{c+c}_{2c}+9)] + c = 115$$

$$c+9 + 8c + 36 + c$$

$$10c + 45 = 115$$

$$-45 \quad -45$$

$$10c = 70$$

$$c = 7$$

Anne : $c+9$ / $7+9 = 16$

$\boxed{16 \text{ coquillages}}$

Élève 6 : L'élève met son inconnue au nombre de coquillages de Corey. Il ne réussit pas le problème, car il y a des erreurs dans la résolution de l'équation.

Anne $= 9+x \rightarrow 20{,}16$

Corey $= x \rightarrow 11{,}16$

Maude $= 4\,(9+x) \rightarrow 55{,}4$

$$9+x+x+4\,(9+x) = 115$$

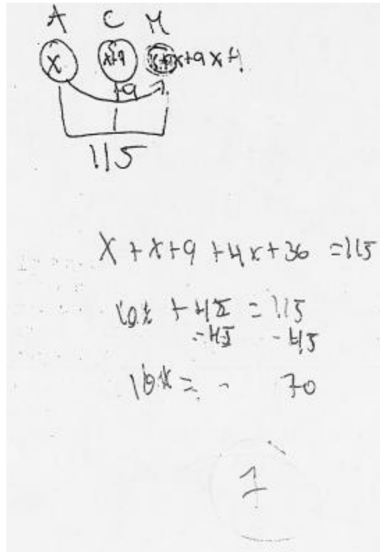
$$6x+48 \overset{-48}{=} 115^{-48}$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{67}{6}$$

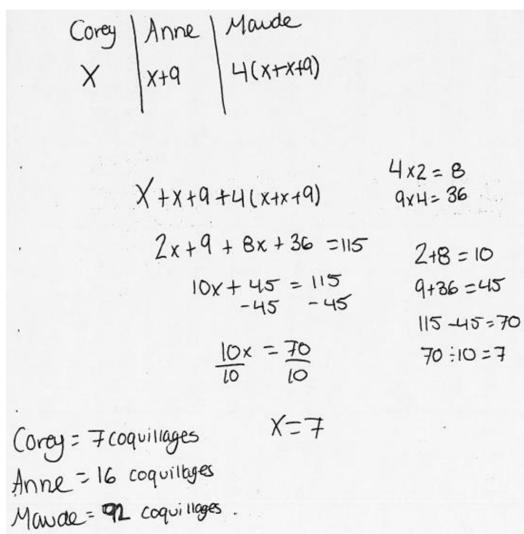
$$x = 11{,}16 \ \text{✗}$$

Réponse : 20,16 coquillages

Élève 14 : L'élève met son inconnue au nombre de coquillages d'Anne. Il ne réussit pas ce problème, car il y a des erreurs dans la traduction du texte en expressions algébriques.



Élève 15 : L'élève met son inconnue au nombre de coquillages de Corey. Son résultat est correct.



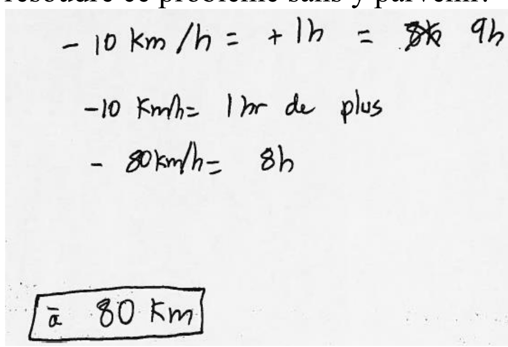
Synthèse

Raisonnement algébrique	Réussi	14 (no 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 15, 16, 20, 23, 25, 26)
	Non réussi	6 (cause : no 6, 11 résolution, no 9, 14 expressions algébriques, no 22 expralg+ eq
	Ébauche	3 (no 17, 18, 24)
Raisonnement arithmétique	Réussi	0
	Non réussi	1
Rien		2

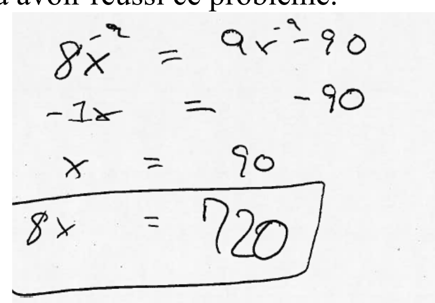
Ce problème est le mieux réussi du questionnaire, soit 14 élèves.

<u>Destination de vacances</u>
Pour se rendre à notre destination de vacances, ma mère roule habituellement pendant 8 heures à une vitesse constante. Cette année, pour économiser de l'essence, elle a décidé de diminuer sa vitesse de 10 km par heure, même si cette diminution exigera une heure de plus pour arriver à notre destination. À quelle distance de notre maison se situe notre destination de vacances ?

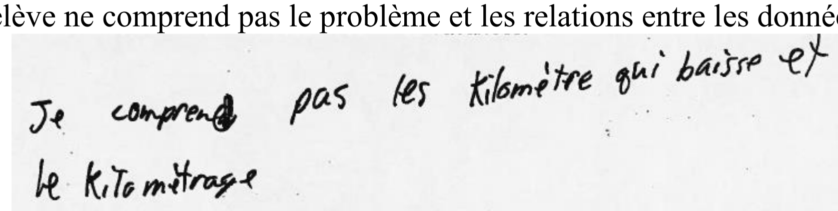
Élève 3 : L'élève tente de résoudre ce problème sans y parvenir.



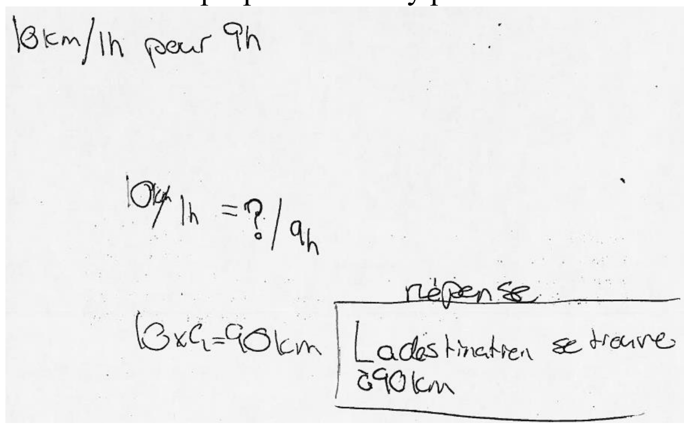
Élève 4 :C'est le seul élève à avoir réussi ce problème.



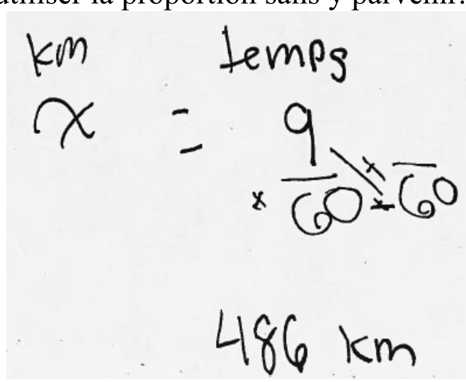
Élève 5 : L'élève ne comprend pas le problème et les relations entre les données.



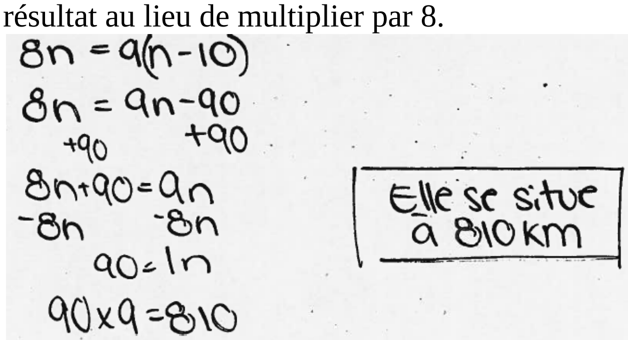
Élève 7 :L’élève tente d’utiliser la proportion sans y parvenir.



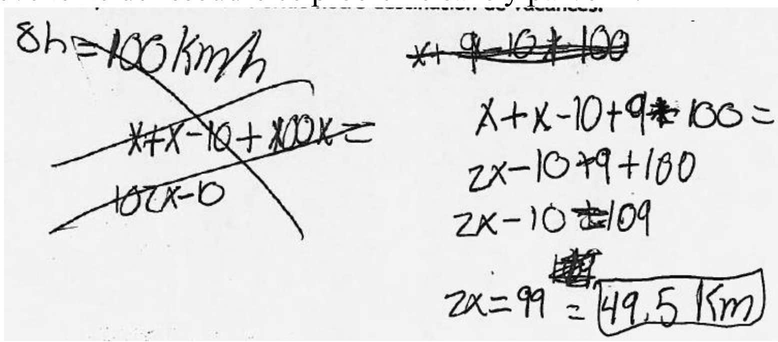
Élève 12 : L’élève tente d’utiliser la proportion sans y parvenir.



Élève 13 : L’élève a fait une erreur mineure à la fin de sa résolution du problème en multipliant par 9 son résultat au lieu de multiplier par 8.



Élève 22 : L'élève tente de résoudre ce problème sans y parvenir.



<u>Synthèse</u>

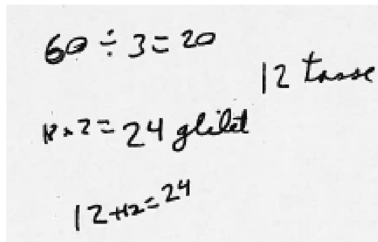
Raisonnement algébrique	Réussi	1 (no 4)
	Non réussi	6 (no 6, 8 équation, no 10 invention données, no 13 erreure mineure, no 20 équation, no 22 expralg+eq, no24 expalg)
Raisonnement arithmétique	Réussi	0
	Non réussi	4 (no 3, 7, 12 mauvaise proportion, no14 inventions données)
Rien		14

Le problème du questionnaire où il y a le moins d'élèves qui ont tenté de répondre et où il y a 1 seul élève qui l'a réussi.

<u>Souvenirs</u>

Dans un magasin de souvenirs, Jeanne décide d'acheter une tasse, deux bracelets et un gilet. Elle dépense 60 $ pour ses achats. Un gilet coûte trois fois plus cher qu'une tasse. Le gilet coûte le double du prix d'un bracelet augmenté de 12 $. Combien coûte un gilet ?

Élève 1 : L'élève n'a pas réussi ce problème, car il a divisé le montant total en 3, car il y a 3 objets.



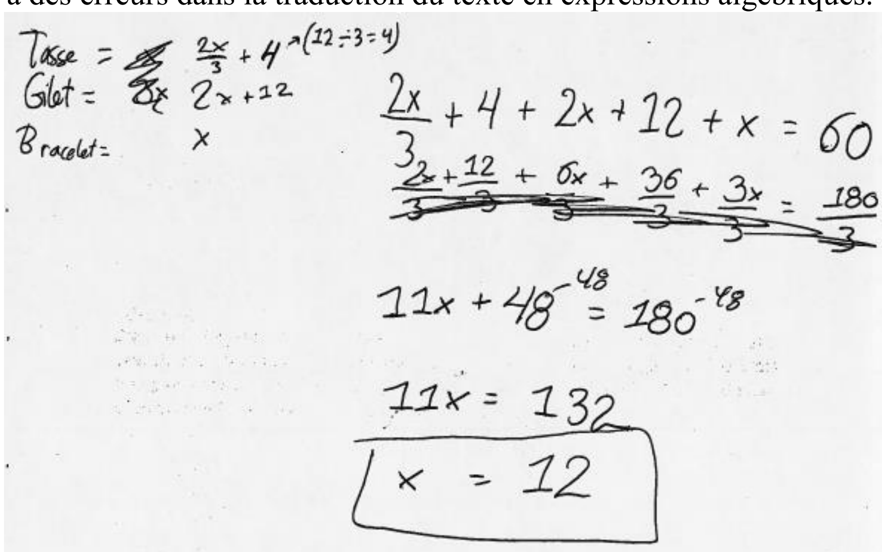
$60 \div 3 = 20$

12 tasse

$12 \times 2 = 24$ gilet

$12 + 12 = 24$

Élève 4 : L'élève met son inconnue au prix du bracelet. Il n'a pas réussi le problème puisqu'il y a des erreurs dans la traduction du texte en expressions algébriques.



Tasse = $\frac{2x}{3} + 4$ $(12 \div 3 = 4)$

Gilet = $2x + 12$

Bracelet = x

$$\frac{2x}{3} + 4 + 2x + 12 + x = 60$$

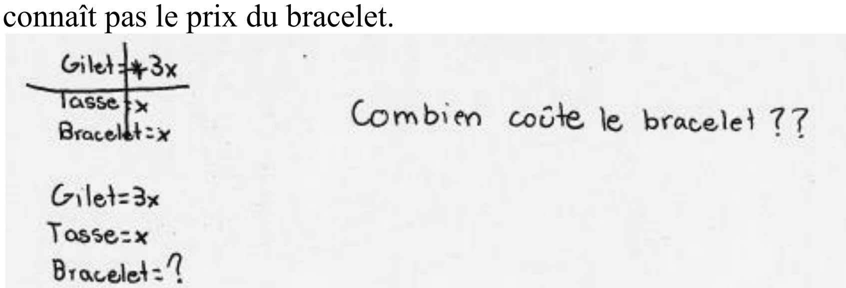
$$\cancel{\frac{2x}{3} + \frac{12}{3} + \frac{6x}{3} + \frac{36}{3} + \frac{3x}{3} = \frac{180}{3}}$$

$$11x + 48^{-48} = 180^{-48}$$

$$11x = 132$$

$$\boxed{x = 12}$$

Élève 6 : L'élève met son inconnue au prix de la tasse. Il ne termine pas ce problème puisqu'il ne connaît pas le prix du bracelet.



Gilet = $3x$

Tasse = x

Bracelet = x

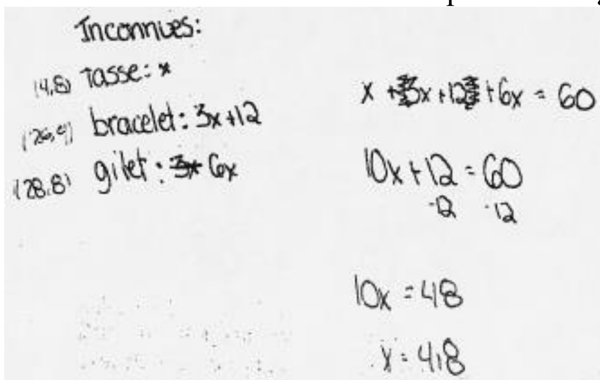
Combien coûte le bracelet ??

Gilet = $3x$

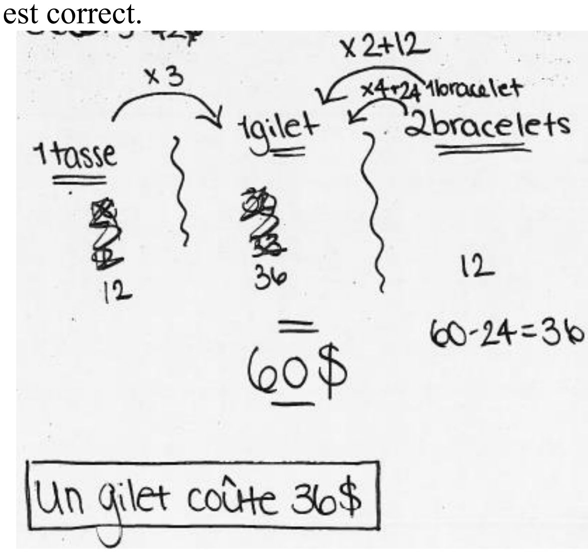
Tasse = x

Bracelet = ?

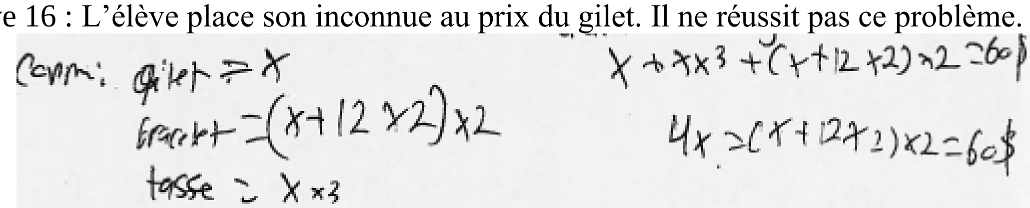
Élève 10 : L'élève met son inconnue au prix de la tasse. Il ne réussit pas le problème puisqu'il y a des erreurs dans la traduction du texte en expressions algébriques.



Élève 13 : L'élève comprend les relations entre les données sans utiliser explicitement l'algèbre. Son résultat est correct.



Élève 16 : L'élève place son inconnue au prix du gilet. Il ne réussit pas ce problème.



Élève 23 : L'élève place son inconnue au prix d'une tasse. Il ne réussit pas ce problème puisqu'il oublie qu'il y a 2 bracelets.

Gilet : $3x = 30,84$

tasse : $x = 10,28$

Bracelet : $3x - 12 = 18,84$

$$3x + x + 3x - 12 = 60 \quad {}^{+12}$$

$$\frac{7x}{7} = \frac{72}{7}$$

$$x = 10,28$$

$\boxed{\text{1 gilet coûte : 18,84\$}}$

<u>Synthèse</u>

Raisonnement algébrique	Réussi	Inconnue mise au prix d'une tasse	0
		Inconnue mise au prix d'un gilet	0
		Inconnue mise au prix d'un bracelet	1 (no 7)
	Non réussi	Inconnue mise au prix d'une tasse	6 (no 5, 10, 15, 19, 20, 22 expressions algébriques, no23 oubli 2 bracelets)
		Inconnue mise au prix d'un gilet	4 (cause : no 3 expralg + eq, no 9, 16, 21 expralg)
		Inconnue mise au prix d'un bracelet	3 (no 4, 26 expr alg, no25 oubli 2 bracelets et expalg)
	Ébauche	Inconnue mise au prix d'une tasse	3 (no 6, 8, 11)
		Inconnue mise au prix d'un gilet	1 (no 12)
		Inconnue mise au prix d'un bracelet	2 (no 18, no 24 tentative inconnue au bracelet et tantôt à la tasse)
Raisonnement arithmétique	Réussi		1 (no 13)
	Non réussi		1 (cause : no 1 parts non égales)
	Ébauche		1 (no 2)
Rien			2 (no 14, 17)

Il y a une grande variété dans l'établissement de la variable inconnue. Les élèves ne semblent pas mieux réussir s'ils mettent l'inconnue à une certaine variable. La plus grande difficulté dans ce problème est l'écriture des expressions algébriques. Plusieurs semblaient capables d'écrire correctement une équation et de la résoudre, mais les expressions algébriques n'étaient pas correctement écrites. Il y a un seul élève qui a réussi ce problème.

ANNEXE III : CANEVAS DE L’ENTREVUE INDIVIDUELLE

Expérience de l’enseignant

1. Quelle est votre formation ?
2. Combien d’années d’expérience avez-vous en enseignement ?
3. Combien d’années d’expérience avez-vous en mathématique de 2e secondaire ?
4. Quels types de classes que vous avez cette année ?
    - Élèves en PEI, régulier, en difficulté, dans une concentration ?

Implication dans le projet

5. Pourquoi désirez-vous participer à cette recherche ?
    - Que pensez-vous pouvoir apporter à cette recherche ?
    - Que pensez-vous pouvoir retirer de cette recherche ?

Planification globale sur les problèmes écrits en algèbre

6. Comment abordez-vous l’enseignement de l’algèbre avec vos élèves ?
7. Décrivez-moi votre séquence d’enseignement concernant les problèmes écrits en algèbre.
    - Pourquoi avez-vous choisi cette façon de travailler ?
    - Combien de périodes consacrez-vous aux problèmes écrits en algèbre ?
    - Y a-t-il des préalables à ce contenu mathématique ?
    - À quel moment de l’année scolaire faites-vous cette séquence d’enseignement ?
    - Pourquoi choisissez-vous de le traiter à ce moment de l’année ?
    - Quels sont les problèmes que vous choisissez en premier, en deuxième et ainsi de suite ? Pourquoi ?
    - Y a-t-il des aspects plus importants que d’autres dans votre séquence ? Si oui, lesquels et pourquoi ?

Méthodes d’enseignement

8. Quelles sont vos méthodes privilégiées d’enseignement de l’algèbre ?
    - Pourquoi avez-vous choisi cette façon de travailler ?
9. Quelles ressources privilégiez-vous dans votre enseignement de l’algèbre auprès des élèves ?
    - Pourquoi avez-vous choisi ces ressources ?
    - Comment travaillez-vous avec ces ressources ?

Ressources utilisées

10. Dans quelle mesure vous référez-vous aux documents ministériels (Programme de formation de l’école québécoise PFEQ, progression des apprentissages, cadre d’évaluation) ?
11. Dans quelle mesure vous référez-vous aux manuels des maisons d’édition ?

- Quelle place prennent ces manuels dans votre enseignement de la résolution de problèmes en algèbre ?

Difficultés ressenties par les élèves

12. Quelles sont les difficultés des élèves en algèbre ?
13. Quelles sont les difficultés des élèves lorsqu'ils résolvent des problèmes écrits en algèbre ?

Concept de complexité

14. Comment décrivez-vous le concept de complexité dans les problèmes écrits en mathématique ?
    - Quelle serait, selon vous, la différence entre complexité et difficulté ?
15. Comment reconnaissez-vous un problème complexe en mathématique ?
16. Quels sont les éléments qui causent de la complexité dans les problèmes écrits en algèbre ?

Nous en sommes à la conclusion de l'entrevue. Avez-vous des commentaires à ajouter à la suite de notre discussion ?

Je vous remercie énormément du temps que vous m'avez accordé aujourd'hui. Ensuite, nous nous rencontrerons en novembre pour discuter des critères de complexité et pour analyser des copies d'élèves. Finalement, lors d'une journée pédagogique, nous validerons le modèle que nous aurons construit à partir des critères de complexité que nous aurons identifiés lors de notre rencontre de groupe précédente.

ANNEXE IV : CANEVAS DE LA RENCONTRE DE GROUPE 1

Bonjour,
Je tiens tout d'abord à vous remercier d'avoir accepté de participer à cette entrevue dans le cadre d'une recherche portant sur la complexité des problèmes écrits en algèbre menée par moi-même Lysandre Berger, étudiante à la maitrise en éducation à UQAR. Lorsqu'on travaille les résolutions de problème en algèbre, il existe différents éléments de complexité. Mon objectif est de construire avec vous les enseignants une grille d'analyse présentant les critères de complexité que l'on peut retrouver dans les problèmes écrits en algèbre. Cette entrevue, d'une durée d'environ deux heures, sera enregistrée et les données video seront détruites au terme de la recherche. L'anonymat est garanti. Vous êtes libres de vous retirer de la recherche en tout temps en communiquant avec l'étudiante ou les professeures aux coordonnées que vous retrouvez à la fin du formulaire de consentement. Je vous rappelle qu'en vous engageant dans ce projet de recherche, il y a une rencontre individuelle, la rencontre de groupe d'aujourd'hui et une autre rencontre de groupe vers la mi-décembre pour atteindre l'objectif mentionné plus tôt.

Aujourd'hui, nous objectif est de faire émerger des critères de complexité que vous jugez pertinents à partir de différents problèmes que je vais vous présentez. De ces critères, nous amorcerons l'élaboration d'une grille d'analyse qui regroupe ces critères. La deuxième rencontre, nous bonifierons ce modèle des critères de complexité avec d'autres problèmes et nous tenterons de l'opérationnaliser. Avez-vous des questions ou des commentaires à formuler avant que nous commencions ?

<u>Définition de complexité</u>

1. Comment décrivez-vous le concept de complexité dans les problèmes écrits en algèbre ?
2. Comment reconnaissez-vous un problème complexe en mathématique ?
3. Quels sont les critères qui peuvent influencer la complexité dans les problèmes écrits en algèbre ?

<u>Éléments de complexité</u>

4. Je vous ai demandé d'apporter des problèmes écrits en algèbre que vous jugez complexes. J'aimerais qu'on les regarde ensemble et que vous m'expliquiez pourquoi ils sont complexes.
5. J'aimerais maintenant que l'on regarde les problèmes que vous avez apportés que vous ne jugez pas complexes. Expliquez-moi pourquoi ils sont moins complexes que les problèmes précédents.

6. Dans vos entrevues individuelles, vous m'avez fait ressortir certains critères de complexité.
    - Français, la lecture
    - Organisation de l'énoncé (tournure de phrases, paragraphes, avec puces)
    - Mélanger avec un autre concept comme l'aire
    - Combiner des expressions algébriques avec une résolution
    - Plusieurs étapes intermédiaires
    - Où le chemin est moins direct pour résoudre (étapes implicites)
    - Beaucoup d'informations dans le problème (contexte pas rapport avec la tâche demandée)
    - Beaucoup de liens entre les personnes (beaucoup de personnes inconnues)
    - Ex : deux de moins que le triple
    - Présence de fractions
    - Plus long à faire
    - Mathématisation
    - Phrase contenant des « que l'autre »

Qu'en pensez-vous ? Êtes-vous d'accord ou en désaccord avec celles-ci ? En avez-vous d'autres à formuler ?

<u>Complexité dans le questionnaire</u>

Dans le cadre de cette recherche, des questionnaires ont été distribués à des élèves de 2^{e} secondaire en mai 2015. Ensuite, le taux de réussite et une analyse des productions des élèves ont été faits sur chaque question.

7. J'aimerais que vous vous prononciez sur le taux de réussite, en pourcentage, de chacune des questions et pourquoi vous estimez ce résultat pour chacune d'elles.
8. Placez les nombres de 1 à 6 où 6 est le problème le plus échoué par les élèves. J'aimerais que vous vous prononciez sur les critères de complexité de chacun des problèmes en plus de les justifier.

<u>Complexité dans les problèmes GDM</u>

9. Maintenant, je vais vous présenter des problèmes et j'aimerais que vous vous prononciez sur leur complexité en plus de l'expliquer. Placez les nombres de 1 à 4 où 4 est le problème le plus complexe.

<u>Complexité dans les recherches</u>

10. Dans les recherches, il y a des critères de complexité qui ont été étudiés : la structure relationnelle, le contexte, les modes de représentation des données, les concepts en jeu, l'activité cognitive, les types de données, l'ouverture de la réponse et le nombre de tâches. Est-ce qu'il y a des critères de complexité que vous aimeriez retenir dans notre modèle ? Est-ce qu'il y a des critères avec lesquels vous n'êtes pas d'accord ?

<u>Synthèse</u>

11. Donc, à la lumière que nos discussions, voici les critères de complexité que nous avons sortis. En avez-vous d'autres à formuler que nous n'avons pas abordés ?
12. Nous en sommes à la conclusion de l'entrevue. Avez-vous des commentaires à ajouter à la suite de notre discussion ?

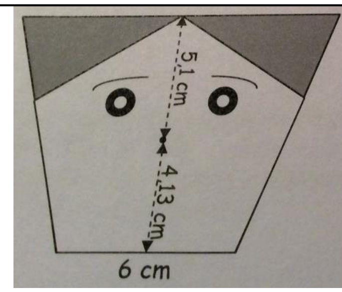
Je vous remercie énormément du temps que vous m'avez accordé aujourd'hui. Nous en sommes très reconnaissantes. Pour la suite du projet, je vais analyser les critères de complexité que nous avons ressortis dans le but de construire une grille d'analyse les regroupant. Ce modèle pourra vous servir à complexifier ou à simplifier les problèmes que vous proposez aux élèves ou même les diversifier. À la prochaine rencontre, nous validerons ce modèle des critères de complexité avec d'autres problèmes pour le bonifier au besoin.

Avez-vous des questions ou des commentaires ?

ANNEXE V : PROBLÈMES APPORTÉS PAR LES ENSEIGNANTS

Âge (Félix) : J'ai 27 ans de plus que mon fils. Dans 4 ans, je serais quatre fois plus vieille que lui. Quels sont nos âges respectifs ?

Aire des cheveux (Éric) : Un dessinateur trace une figure de ses personnages en commençant par de formes géométriques puis les arrondis peu à peu. Voici l'esquisse qui comporte un pentagone régulier qui représente le visage et deux triangles isocèles foncés qui représentent les cheveux. Quelle l'aire des cheveux ?



Clôture du 400e (Éric) : Ton entreprise de clôture est choisie par l'organisation des Fêtes du 400e de Québec pour clôturer l'*Espace 400e*. Les administrateurs t'envoient le plan détaillé et y indique quelques normes à respecter.

Les administrateurs te demandent d'installer une clôture autour du site et autour de la scène pour contrôler la foule, en plus d'étendre une couche de pierre concassée dans tout le parterre pour la sécurité des spectateurs. Tu dois leur remettre une soumission du prix total incluant les prix détaillés des travaux.

Voici les normes fournies par les organisateurs et que tu dois respecter.

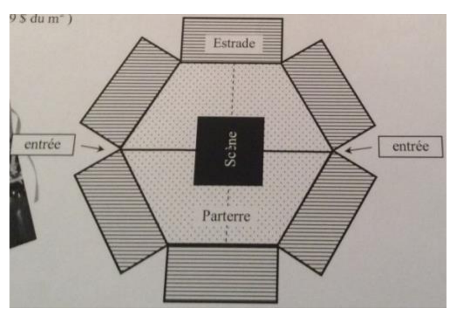
- Le périmètre de la scène et du parterre réunis mesure 776 m .
- Le rapport $\frac{\text{périmètre scène+parterre}}{\text{périmètre toutes les estrades}} = \frac{8}{15}$
- La longueur d'une estrade est quatre fois plus grande que sa largeur.
- L'aire de la scène est la même que celle d'une estrade.
- La longueur de l'allée d'une entrée à l'autre mesure 26 m de moins que la moitié du périmètre du carré.
- La distance entre les deux estrades l'une en face de l'autre respecte le rapport 14 : 97 avec le périmètre du parterre.

Voici les prix des matériaux que tu utiliseras :

- Grillage métallique (prix au m) selon les tarifs suivants :

Longueur (m)	2	3	4
Prix ($)	5,10	7,65	10,20

- Poteaux (8 pour 100$)
- Quincaillerie pour fixation (0,89 $ du poteau)
- Pierre concassée (1,69 $ du m^2)



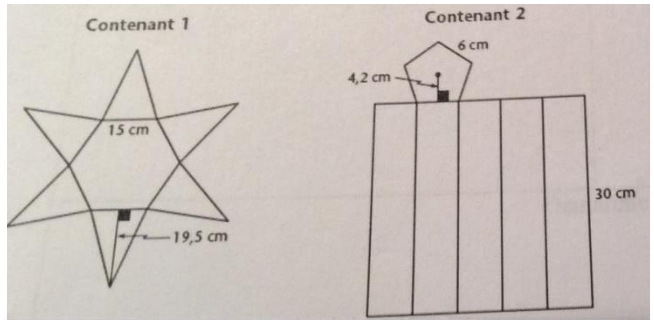
Collection de monnaie (Félix) : Trois amis collectionnent des pièces de monnaie. Louis possède 7 pièces de moins que le quintuple du nombre de pièces que possède Jean. Il faut ajouter 28 pièces au quadruple du nombre de pièces que possède Jean pour obtenir le nombre de pièces dans la collection de Guillaume. Sachant que Louis et Guillaume possèdent le même nombre de pièces, détermine le nombre de pièces dans le fond dans la collection de Jean.

Cinéma (Éric) : Un propriétaire de cinéma se demande quel contenant de maïs soufflé il devrait choisir minimiser ses dépenses. Les contenants sont de formes différentes. Le contenant de maïs soufflé 1 a la forme d'une pyramide régulière à base hexagonale et le contenant 2, celle d'un prisme régulier à base pentagonale.
Le contenant 1 sera fait de plastique recyclé. Ce plastique est vendu au décimètre carré uniquement. Chaque décimètre carré coûte 0,04 $.

Le contenant 2 sera fait de carton. Le prix du carton est proportionnel à sa superficie. Voici quelques exemples de prix :

Superficie (m^2)	4	7
Prix ($)	11,60	20,30

Pour aider le propriétaire du cinéma à faire son choix, détermine le prix de chacun des contenants (arrondis tes réponses finales aux centièmes).

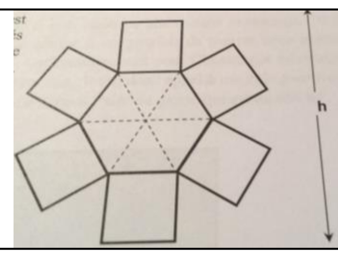


Croissance d'une plante (Félix) : On plante un arbre de 1,75 m dont la croissance moyenne est de 35 cm par année. Un second arbre de 2,24 m est planté non loin, qui croîtra en moyenne de 28 cm par année. On devra tailler ces deux arbres lorsque la somme de leurs tailles sera 8,4 m. Dans combien d'année taillera-t-on ces arbres ?

Fenêtres (Félix) : Dans un immeuble, il y a des fenêtres à 6 carreaux et des fenêtres à 8 carreaux. Les ¾ du nombre de fenêtres à 8 carreaux représentent le nombre de fenêtres à 6 carreaux Si le nombre total de carreaux s'élève à 400, combien peut-on compter de fenêtres de chaque sorte ?

Football (Félix) : Au football, ton équipe avance x+2 verges au premier essai, ensuite de 2x-7 verges au deuxième essai et ensuite 3x+2 verges au troisième essai. Tu sais qu'au deuxième essai, vous avez perdu 3 verges. Donc, à la fin de ces trois essais est-ce que vous en êtes à nouveau au premier essai ou bien au quatrième essai ?

Logo d'une compagnie (Éric) : Le logo d'une compagnie d'engrenages est constitué d'un hexagone régulier avec des carrés sur chaque côté. Le périmètre de la figure est de 396 cm et son aire totale est de 5375,75 cm^2. Détermine la hauteur h du logo.



Poseur de céramique (Félix) : Un poseur de céramique compte combien il pose de morceaux. La première heure il pose 2X -8 morceaux. La deuxième heure, il en pose 2x -12 et la troisième heure x+15. Il sait que l'aire totale correspond à environ 20 mètres carré et qu'un morceau a une superficie de 0,1 m². Combien de morceaux a-t-il posé à chacune des heures ?

Vélo (Félix) : Marc Paul et Jean font du vélo pendant une fin de semaine. Paul a fait 2 km de moins que Jean. Marc a parcouru 5 fois plus de kilomètres que Paul. En tout, ils ont roulé une distance de 37. Quelle est la distance parcourue par chacun ?

Trouver un nombre (Félix) : Quel est le nombre dont les 3/8 augmenté de 25, plus les 5/6 diminué de 43 font 330 ?

ANNEXE VI : PROBLÈMES TIRÉS DE L'ARTICLE DE SABOYA *ET AL.* (2013)

BD

Frédéric, Lucie et Roger ont ensemble 55 albums de bandes dessinées. Lucie a 15 albums de plus que Frédéric et Roger a le double d'albums de Frédéric. Combien d'albums chacun a-t-il ?

Sport

Dans une école, 180 élèves pratiquent du sport. Le nombre d'élèves qui pratiquent le soccer est le triple de ceux qui pratiquent le volley et le nombre d'élèves qui pratiquent le basket est le double du nombre d'élèves qui pratiquent le volley. Dans cette école, combien d'élèves pratiquent chaque sport ?

Camp de jour

Un camp de jour offre trois activités de plein air. Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le soccer regroupe 127 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles ?

Facebook

Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site Facebook. Sophia a 3 fois plus d'amis que Carlos et François a 114 amis de plus que Sophia. Si au total ils sont 380 amis, combien d'amis ont-ils chacun ?

ANNEXE VII : LISTE DES 30 CRITÈRES ÉVOQUÉS PAR LES ENSEIGNANTS

Ordre des phrases dans le texte
Tournure des phrases
Avec de puces et des tirets dans le texte
Beaucoup de texte à lire
Informations inutiles
Contexte connu ou non des élèves
Plusieurs concepts
Présence de concepts plus difficiles comme les fractions ou les expressions algébriques ou un trapèze ou le pourcentage
Plusieurs étapes intermédiaires interdépendantes
Précision des questions
Où le chemin est moins direct pour résoudre (étapes implicites)
Beaucoup d'informations dans le problème (contexte pas rapport avec la tâche demandée)
Lien entre les personnes : deux de moins que le triple, double, 15 de plus, quintuple
Nombre d'inconnues en lien (2, 3 ou 4 personnes)
Mathématisation
Traduction des expressions à partir de l'énoncé
Phrase contenant des « que » (comparaison)
Problème avec une égalité entre 2 personnes
Problèmes avec des variables dépendantes et indépendantes
Question catégorie I et catégorie II
Réponse est un nombre ou une expression algébrique

Réponse unique ou plage de réponses
Dans l’équation, tous les *x* sont du même côté ou de chaque côté
Connaissances antérieures, coffre à outils rempli
Visualiser en 3D
Faire des inférences
Sortir des sentiers battus pour résoudre
Pas de choix de virer une phrase pour trouver l’expression algébrique
Identifier comme il faut, c’est quoi le *x*
Contraintes

ANNEXE VIII : CANEVAS DE LA RENCONTRE DE GROUPE 2

Bonjour,
Je tiens tout d'abord à vous remercier d'avoir accepté de participer à cette entrevue dans le cadre d'une recherche portant sur la complexité des problèmes écrits en algèbre menée par moi-même Lysandre Berger, étudiante à la maitrise en éducation à UQAR. Lorsqu'on travaille les résolutions de problème en algèbre, il existe différentes variables de la complexité. Mon objectif est de construire avec vous les enseignants un modèle regroupant les critères de complexité que l'on peut retrouver dans les problèmes écrits en algèbre. Cette entrevue, d'une durée d'environ deux heures, sera enregistrée et les données video seront détruites au terme de la recherche. L'anonymat est garanti. Vous êtes libres de vous retirer de la recherche en tout temps en communiquant avec l'étudiante ou les professeures aux coordonnées que vous retrouvez à la fin du formulaire de consentement. Je vous rappelle qu'en vous engageant dans ce projet de recherche, il y a eu une rencontre individuelle, la première rencontre de groupe et la rencontre de groupe d'aujourd'hui pour atteindre l'objectif mentionné plus tôt.

Aujourd'hui, notre objectif est de construire ensemble un modèle présentant les critères de complexité que vous jugez pertinents qui ont émergés lors de notre dernière rencontre. Nous bonifierons également ce modèle des critères de complexité avec d'autres problèmes et nous tenterons de l'opérationnaliser.

Avez-vous des questions ou des commentaires à formuler avant que nous commencions ?

1. À la lumière de nos discussions, est-ce que vous trouvez pertinent de distinguer le concept de difficulté et de complexité ? Pourquoi ?

2. À la lumière de nos discussions, est-ce que vous trouvez pertinent de distinguer les facteurs influencés par l'énoncé et ceux par l'élève ?

3. Que désirez-vous comme modèle de complexité à la fin du projet ?
    - Un modèle qui aide à identifier et nommer les critères de complexité d'un problème écrit en algèbre
    - Un modèle qui tente de comprendre la complexité d'un problème écrit en algèbre en classifiant les critères du moins complexe au plus complexe (cette avenue implique une troisième rencontre)

<u>Début d'un modèle des critères de complexité</u>

4. Je remontre la liste des critères qui ont émergé lors de votre rencontre individuelle et de notre première de groupe. J'aimerais que vous organisiez individuellement les critères pour former de grandes catégories. Ensuite, on tentera d'en arriver à un consensus.
    - Ordre des phrases dans le texte
    - La tournure des phrases
    - Avec de puces et des tirets dans le texte
    - Beaucoup de texte à lire
    - Informations inutiles
    - Contexte connu ou non des élèves (football, installation de céramique, vitesse, achat de pop-corn)
    - Plusieurs concepts
    - Présence de concept plus difficile comme les fractions ou les expressions algébriques ou un trapèze ou le pourcentage
    - Plusieurs étapes intermédiaires interdépendantes
    - Précision des questions
    - Où le chemin est moins direct pour résoudre (étapes implicites)
    - Beaucoup d'informations dans le problème (contexte pas rapport avec la tâche demandée)
    - Lien entre les personnes : deux de moins que le triple, double, 15 de plus, quintuple
    - Nombre d'inconnues en lien (2, 3 ou 4 personnes)
    - Mathématisation
    - Traduction des expressions à partir de l'énoncé
    - Phrase contenant des « que » (comparaison)
    - Problème égalité entre 2 personnes
    - Problèmes avec des variables dépendantes et indépendantes
    - Question catégorie I et catégorie II
    - Type de réponse : nombre ou expression algébrique
    - Réponse unique ou plage de réponses
    - Dans l'équation, tous les x sont du même côté ou de chaque côté
    - Bagage des élèves (connaissances antérieures, coffre à outils rempli, capacité à visualiser en 3D, inférence, influence des parents qui ont de mauvais souvenirs concernant les maths, sortir des sentiers battus, retourner aux bases/définitions)
    - Pas de choix de virer une phrase pour trouver l'expression algébrique
    - Identifier comme il faut c'est quoi le x
    - Contraintes

<u>Complexité d’autres problèmes</u>

5. Je vous présente d’autres problèmes et j’aimerais qu’on bonifie notre modèle des critères et qu’on la modifie, au besoin, à la lumière des nouveaux problèmes pour que notre modèle tente de représenter la complexité dans la plupart des problèmes écrits en algèbre.

<u>Modèle final et opérationnalisation</u>

6. Je vous présente finalement d’autres problèmes. J’aimerais qu’on tente d’expliquer la complexité des problèmes à l’aide de notre modèle.

<u>Synthèse</u>

7. Nous en sommes à la conclusion de l’entrevue. Avez-vous des commentaires à ajouter à la suite de notre discussion ?

Je vous remercie énormément du temps que vous m’avez accordé aujourd’hui. Nous en sommes très reconnaissantes. Pour la suite du projet, je vais analyser les critères de complexité et notre modèle. À la suite de mes analyses, je vous transmettrai un modèle pourra vous servir à complexifier ou à simplifier les problèmes que vous proposés aux élèves ou même les diversifier. Avez-vous des questions ou des commentaires ?

ANNEXE IX : CATÉGORISATION DES CRITÈRES SELON ÉRIC

Compétences textuelles et langagières

Beaucoup de texte à lire

Beaucoup d'informations dans le problème (contexte pas rapport avec la tâche demandée)

Informations inutiles

Contexte connu ou non des élèves (football, installation de céramique, vitesse, achat de pop-corn)

Ordre des phrases dans le texte

La tournure des phrases

Phrase contenant des «que» (comparaison)

Précision des questions

Avec de puces et des tirets dans le texte

Traduction des expressions à partir de l'énoncé

Identifier comme il faut, c'est quoi le «x»

Compétence académique et personnelle

Mathématisation

Contraintes

Visualiser en 3D

Faire des inférences

Où le chemin est moins direct pour résoudre (étapes implicites)

Sortir des sentiers battus pour résoudre

Connaissances antérieures, coffre à outils rempli

Compétences d'analyse math

Plusieurs concepts

Plusieurs étapes intermédiaires interdépendantes

Présence de concept plus difficile comme les fractions ou les expressions algébriques ou un trapèze le pourcentage

Problèmes avec des variables dépendantes et indépendantes

Réponse est un nombre ou une expression algébrique

Réponse unique ou plage de réponses

Lien entre les personnes : deux de moins que le triple, double, 15 de plus, quintuple

Question catégorie I et catégorie II

Problème avec une égalité entre 2 personnes

Dans l'équation, tous les «x» sont du même côté ou de chaque côté

Nombre d'inconnues en lien (2, 3 ou 4 personnes)

Pas de choix de virer une phrase pour trouver l'expression algébrique

ANNEXE X : CATÉGORISATION DES CRITÈRES SELON FÉLIX

le comment le problème est construit

Beaucoup d'informations dans le problème (contexte pas rapport avec la tâche demandée)
Beaucoup de texte à lire
Informations inutiles
Ordre des phrases dans le texte
La tournure des phrases
Traduction des expressions à partir de l'énoncé

Avec de puces et des tirets dans le texte
Contraintes
Précision des questions
Pas de choix de virer une phrase pour trouver l'expression algébrique

Nombre d'inconnues en lien (2, 3 ou 4 personnes)
Problème avec une égalité entre 2 personnes
Où le chemin est moins direct pour résoudre (étapes implicites)
Plusieurs étapes intermédiaires interdépendantes

Hors catégorie (dans aucune catégorie)

Problèmes avec des variables dépendantes et indépendantes

Connaissances antérieures ou nb concepts

Visualiser en 3D

Connaissances antérieures, coffre à outils rempli

Sortir des sentiers battus pour résoudre

Plusieurs concepts

Faire des inférences

Question catégorie I et catégorie II

Contexte connu ou non des élèves (football, installation de céramique, vitesse, achat de pop-corn)

Présence de concept plus difficile comme les fractions ou les expressions algébriques ou un trapèze le pourcentage

Construction de la solution

Réponse est un nombre ou une expression algébrique

Réponse unique ou plage de réponses

Dans l'équation, tous les «x» sont du même côté ou de chaque côté

Phrase contenant des «que» (comparaison)

Identifier comme il faut, c'est quoi le «x»

Lien entre les personnes : deux de moins que le triple, double, 15 de plus, quintuple

Mathématisation

ANNEXE XI : CATÉGORISATION DES CRITÈRES SELON LA CHERCHEURE

organisation de l'énoncé

Ordre des phrases dans le texte
La tournure des phrases
Avec de puces et des tirets dans le texte
Informations inutiles
Beaucoup de texte à lire
Précision des questions
Beaucoup d'informations dans le problème

mathématisation

Mathématisation
Traduction des expressions à partir de l'énoncé
Lien entre les personnes : deux de moins que le triple
Pas de choix de virer une phrase
pour trouver l'expression algébrique
Identifier comme il faut, c'est quoi le «x»
Nombre d'inconnues en lien (2, 3 ou 4 personnes)
Dans l'équation, tous les «x» sont du même côté ou de chaque côté

combinaison de concepts

Plusieurs concepts

type de concepts

Présence de concept plus difficile

nombre d'étapes

Où le chemin est moins direct pour résoudre
(étapes implicites)
Plusieurs étapes intermédiaires interdépendantes

type de problème

Phrase contenant des «que» (comparaison)
Problèmes avec des variables dépendantes et indépendantes
Problème avec une égalité entre 2 personnes

contexte

Contexte connu ou non des élèves

type de question/réponse

Question catégorie I et catégorie II
Réponse est un nombre ou une expression algébrique

connaissances de l'élève

Contraintes
Réponse unique ou plage de réponses
Sortir des sentiers battus pour résoudre
Connaissances antérieures, coffre à outils rempli
Faire des inférences
Visualiser en 3D

Annexe XII : Catégorisation co-construite des critères

Organisation physique du tx

place

Beaucoup de texte à lire

Informations inutiles

Précision des questions

formulation

Ordre des phrases dans le texte

Avec de puces et des tirets dans le texte

La tournure des phrases

Beaucoup d'informations dans le problème (contexte pas rapport avec la tâche demandée)

présentation des données

dessin

écriture nb

Ressources de l'élève

Visualiser en 3D

Faire des inférences

Connaissances antérieures, coffre à outils rempli

Présence de concept plus difficile comme les fractions ou les expressions algébriques ou un trapèze

le pourcentage

réinvestir connaissances

Sortir des sentiers battus pour résoudre

Contexte connu ou non des élèves (football, installation de céramique, vitesse, achat de pop-corn)

Mathématisation

Mathématisation

Traduction des expressions à partir de l'énoncé

Plusieurs étapes intermédiaires interdépendantes

Identifier comme il faut, c'est quoi le «x»

implicites

Lien entre les personnes : deux de moins que le triple, double, 15 de plus, quintuple

Contraintes

Plusieurs concepts

formulation équation

Type de problème

valeur monétaire avec qté?

Pas de choix de virer une phrase pour trouver l'expression algébrique

Problème avec une égalité entre 2 personnes

Phrase contenant des «que» (comparaison)

Problèmes avec des variables dépendantes et indépendantes

Réponse est un nombre ou une expression algébrique

Question catégorie I et catégorie II

Réponse unique ou plage de réponses

Nombre d'inconnues en lien (2, 3 ou 4 personnes)

Dans l'équation, tous les «x» sont du même côté ou de chaque côté

Où le chemin est moins direct pour résoudre

déstabilisant (sortir des sentiers battus)

Avant enseignant (problème nouveau difficile)

Pendant

ANNEXE XII : NOUVEAUX PROBLÈMES

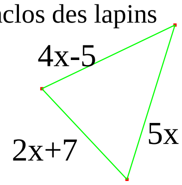
Saut du kangourou (Clarou et Capponi, 1998, p.18, no. 46) : Comme chacun le sait la course du kangourou se fait en sautant. Un kangourou effectue 2 sauts en 1,5 seconde. Il court à une vitesse de 12 km/h. Trouve le nombre de sauts qu'il fait pour parcourir 100 m ?

À la ferme (problème issu d'un collectif d'enseignants) : Il y a dans une ferme des poules et des chevaux, soit 35 têtes et 110 pattes. Combien y a-t-il de chevaux ?

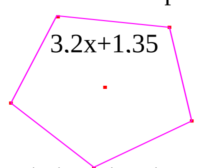
Enfants malades (À vos maths, Coupal, 2010, p.300 no.19): Sensible à la cause des enfants malades, Eugénie, 7 ans, organise à sa manière une collecte de fonds pour la Fondation de l'Hôpital Sainte-Justine. Elle demande à tous les gens de sa famille et de son voisinage de donner des sous noirs ou des canettes consignées 5 ¢. Après sa collecte, Eugénie constate qu'elle a 3 fois plus de canettes que de sous noirs. Pour la féliciter de son geste, son père lui remet, en argent l'équivalent de ce qu'elle a amassé. Lors de sa prochaine visite à l'hôpital, Eugénie sera fière de remettre 70,08 $ à la Fondation. Combien de canettes et de sous noirs a-t-elle recueillis ?

Enclos (problème issu d'un collectif d'enseignants) : Un fermier possède trois enclos dans lesquels il garde des poules, des lapins et des vaches. Cependant les derniers hivers ont abimé ses clôtures et il doit les changer. Tu dois déterminer le coût de réparation de chacun des enclos.

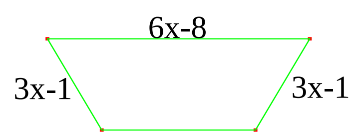
Enclos des lapins



Enclos des poules



Enclos des vaches



- La mesure du côté manquant de l'enclos des vaches est la différence entre le périmètre de l'enclos des poules et des lapins.
- Le périmètre total des trois enclos est de 443 mètres.
- La clôture se vend 5 $ pour 2 mètres.

Fromage (*Panoramath*, Cadieux, Gendron et Ledoux, 2005, manuel B, vol. 2, p.14 no.16) : Une fromagère possède 12 chèvres. Chacune produit 5 L de lait par jour. Il faut 10 L de lait pour produire 1 kg de fromage. La fromagère a en réserve 76 fromages de 100 g chacun et en vend 67 par jour. Dans combien de jours sa réserve sera-t-elle de 20 fromages ?

Réservoirs (problème issu d'un collectif d'enseignants) : Deux réservoirs se vident en 13 minutes. Le premier réservoir se vide à un rythme de 33 litres en 10 minutes. Le 2e réservoir se vide à un rythme de 5 litres en 2 minutes. Ensemble, les réservoirs ont une capacité de 35,7 litres. Combien de litres contient le 2e réservoir ?

Vente d'ordinateurs (problème issu d'un collectif d'enseignants) : Suzie et Luc vendent des ordinateurs pour deux compagnies différentes. Voici le salaire de Suzie :

Nombre d'ordinateurs vendus	3	4	5
Salaire hebdomadaire ($)	395	435	475

Voici le salaire de Luc :

Nombre d'ordinateurs vendus	1	2	3
Salaire hebdomadaire ($)	410	445	480

La semaine dernière, ils ont vendu le même nombre d'ordinateurs et ont reçu le même salaire. Quel est ce salaire ?

Flamme olympique (problème issu d'un collectif d'enseignants) **:** La flamme olympique de Vancouver 2010 a été confectionnée par Bombardier et fonctionne avec un mélange de propane, d'isobutane et d'hydrocarbures. Les différentes matières utilisées sont : un fini de composite blanc, un brûleur en acier inoxydable et un cœur en aluminium.

Une des politiques de la gestion financière des Jeux olympiques est que les prix payés à un sous-traitant ne doivent pas dépasser 130 % des coûts de fabrication (incluant la main d'œuvre).

Un organisme antimondialisation affirmait ce matin que les 1 400 000$ accordés à Bombardier pour la confection des flambeaux olympiques ne respectaient pas la politique de gestion financière des Jeux olympiques. Avait-il raison.

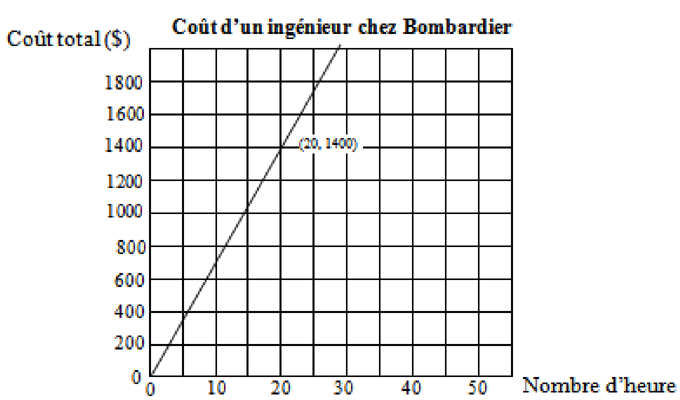
Voici les informations qu'il possédait :

- Quantité de flambeaux commandés : 6 000
- Coût unitaire d'un brûleur en acier inoxydable : 96 $ / brûleur
- Nombre d'heures total de travail par les ingénieurs : 156 heures
- Nombre d'heures total de travail par les machinistes : 1600 heures
- Le taux horaire d'un machiniste est de 23 $
- L'aluminium a été pris aux États-Unis et les autres matériaux au Canada
- Le rapport du prix total en dollars canadiens entre le composite et l'aluminium est de 5 : 6.

Matériaux nécessaires pour 1 flambeau	
Matières	**Quantités**
composite blanc	944 cm^2
brûleur en acier inoxydable	1
aluminium	592 cm^2

Taux de change	
Devise	**Coût en $ can**
1 Euro	1,58
1 Dollar américain	1,08
1 Yen (Japon)	0,01

Comparaison de prix et de quantité de l'aluminium	
Quantité (cm^2)	**Prix (en dollar américain)**
1350	94,50
6 280	439,60
26 420	1 849,40



RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Adihou, A. *et al.* (2015). *Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolution de problèmes de comparaison.* Papier présenté à Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015–Groupe travail.

Anderson, L. et Krathwohl, D. R. (2001). A taxonomy for learning, teaching and assessment. A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives: New York: Longman.

Antoun, Z. (2012). *Analyse des situations d'apprentissage dans le cadre de la résolution de problèmes en algèbre (premier cycle) dans une collection du secondaire.* Université du Québec à Montréal.

Arsac, G., Germain, G. et Mante, A. (1988). Problème ouvert et situation-problème. *IREM de Lyon*.

Artigue, M. (2012). Enseignement et apprentissage de l'algèbre. *Communication présentée*.

Baffrey-Dumont, V. (1996). Résolution de problèmes arithmétiques par des enfants de huit ans. *Revue des sciences de l'éducation, 22*(2), 321-343.

Barry, S. *et al.* (2013). *Défis et enjeux de la démarche de recherche collaborative en didactique des mathématiques*. Papier présenté à Actes de la 16ième école d'été de didactique des mathématiques.

Beaulac, S. (2006). *L'apport d'un travail sur les relations entre les données en situation de resolution de problèmes algébriques.* Universite Laval.

Bednarz, N. et Janvier, B. (1994). *The emergence and development of algebra in a problem solving context: A problem analysis*. Papier présenté à Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Lisbonne : Université de Lisbonne.

Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*: Springer.

Blais, M. et Martineau, S. (2006). L'analyse inductive générale: description d'une démarche visant à donner un sens à des données brutes. *Recherches qualitatives, 26*(2), 1-18.

Bodin, A. (2002). Classification des questions d'évaluation et cadre de référence des études PISA.

Bodin, A. (2004). Taxonomie des énoncés mathématiques, classement par niveaux hiérarchisés de complexité cognitive. *Rapport EVAPM.*

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. *The ideas of algebra, K-12, 19*, 20-32.

Bourassa, B., Leclerc, C. et Fournier, G. (2010). Une recherche collaborative en contexte d'entreprise d'insertion: de l'idéal au possible. *Recherches qualitatives, 29*(1), 140-164.

Bovet, V. (1978). Recherche sur quelques déterminants linguistiques de la compréhension de problèmes mathématiques. *Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques*.

Breton, G. et Fortin, D. (1994). *Carrousel mathématique 1, deuxième secondaire*. Anjou, Québec: Les Éditions CEC.

Brissiaud, R., Guillaume, J.-C. et Neyret, R. (1984). *Comment font-ils?: l'écolier et le problème des mathématiques*: Institut national de recherche pédagogique.

Brousseau, G. (1982). Les objets de la didactique des mathématiques. *Actes de la Troisième école d'été de didactique des mathématiques*.

Cadieux, R., Gendron, I. et Ledoux, A. (2005). *Panoramath, 1er cycle du secondaire*. Anjou, Québec: Les Éditions CEC.

Caldwell, J. et Goldin, G. A. (1979). Variables affecting word problem difficulty in elementary school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 323-336.

Caldwell, J. et Goldin, G. A. (1987). Variables affecting word problem difficulty in secondary school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 187-196.

Carpenter, T. P. *et al.* (1980). Results of the second NAEP mathematics assessment: Secondary school. *The Mathematics Teacher,* 329-338.

Carpenter, T. P. *et al.* (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American educational research journal, 26*(4), 499-531.

Carpenter, T. P., Hiebert, J. et Moser, J. M. (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*(1), 55-72.

Carpenter, T. P. et Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, 9-24.

Centre nationale de ressources textuelles et lexicales. (2012). Lexicographie. Consulté le 21 mai 2017

Charnay, R. (1992). Problème ouvert, problème pour chercher. *Grand N, 51*, 77-83.

Chazan, D., Yerushalmy, M. et Leikin, R. (2008). An analytic conception of equation and teachers' views of school algebra. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*(2), 87-100.

Chenevotot-Quentin, F., Grugeon-Allys, B., et Delozanne, E. (2011). Vers un diagnostic cognitif dynamique en algèbre élémentaire. In *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009, Enseignement des mathématiques et développement: enjeux de société et de formation* (pp. 827-842).

Clarou, P. et Capponi, B. Petit x. Num. 46. p. 18. Activité... histoire de kangourous.

Corriveau, C. (2013). *Des manières de faire des mathématiques comme enseignants abordées dans une perspective ethnométhodologique pour explorer la transition secondaire collégial.* Université du Québec à Montréal.

Cotnoir, G. (2010). *Évolution de l'utilisation des contextes dans les chapitres introductifs à l'algèbre dans les manuels scolaires québécois de 1960 à nos jours.* Université de Sherbrooke.

Coupal, M. (2005). *A vos maths, Mathématiques 1er cycle du secondaire, 2e année, manuel de l'élève B*. Montréal: Graphicor. Chenelière Education.

De Serres, M. et Groleau, J.-D. (1997). *Mathématiques et langages*: Montréal: Collège Jean-de-Brébeuf, Direction pédagogique, Service de la recherche.

De Vecchi, G. et Carmona-Magnaldi, N. (2002). *Faire vivre de véritables situations-problèmes*: Hachette éducation.

DeMars, C. E. (1998). Gender differences in mathematics and science on a high school proficiency exam: The role of response format. *Applied Measurement in Education, 11*(3), 279-299.

Demonty, I. et Fagnant, A. (2014). *Les différentes fonctions de la résolution de problèmes sont-elles présentes dans l'enseignement primaire en Communauté française de Belgique?* Papier présenté à Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21 e siècle–Actes du colloque EMF2012.

Desgagné, S. (1997). Le concept de recherche collaborative: l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation*, *23*(2), 371-393.

Desgagné, S. *et al.* (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation, 27*(1), 33-64.

Deslauriers, J.-P. (1991). *Recherche qualitative: guide pratique*: McGraw-hill.

Devidal, M., Fayol, M. et Barrouillet, P. (1997). Stratégies de lecture et résolution de problèmes arithmétiques. *L'année psychologique*, *97*(1), 9-31.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire.* Université paris VII.

Douady, R. (1986). Un exemple d'ingénierie didactique où sont à l'oeuvre jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Séminaires de didactique des mathématiques,* 1986-1987.

Duval, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.* Papier présenté à Annales de didactique et de sciences cognitives.

Englert, C. S. et Thomas, C. C. (1987). Sensitivity to text structure in reading and writing: A comparison between learning disabled and non-learning disabled students. *Learning Disability Quarterly*, *10*(2), 93-105.

Enright, M. K. et Sheehan, K. (2002). Modeling the difficulty of quantitative reasoning items: Implications for item generation. *Item generation for test development,* 129-157.

Eynard-Bontemps, A. et Sibari, H. (2006). Difficultés des élèves face à un énoncé mathématique: origines et solutions.

Fagnant, A., Marcourx, G. et Vlassis, J. (2014). Résolution de problèmes mathématiques et développement de compétences: sur quelles variables agir pour soutenir les élèves dans leur apprentissage. *Cahiers des Sciences de l'Education (Les), 36,* 1-6.

Fayol, M. (1990). L'enfant et le nombre: Delachaux et Niestlé Paris.

Fayol, M. et Abdi, H. (1986). Impact des formulations sur la résolution de problèmes additifs chez l'enfant de 6 à 10 ans. *European Journal of Psychology of Education, 1*(1), 41-58.

Floc'h, M. et Pfaff, N. (2005). Une séquence sur les problèmes additifs au cycle 2 : le cas des comparaisons de mesures. *Grand N. Num., 75,* p. 19-30.

Freiman, V. et Savard, A. (2014). Résolution de problèmes en mathématiques. *Éducation et francophonie, 42*(2), 1-6.

Gagatsis, A. et Elia, I. (2004). *The effects of different modes of representation on mathematical problem solving.* Papier présenté à Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Gauthier, B. (2003). *Recherche sociale: de la problématique à la collecte des données*: Puq.

Gras, R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques.* Université de Rennes.

Grugeon, B. (1995). *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement: BEP et Première G.* Université de Paris.

Guay, S., Hamel, J.-C. et Lemay, S. (2005). *Perspective mathématique: 1er cycle du secondaire*. Montréal: Éditions Grand Duc-HRW.

Guzman, J., Bednarz, N. et Hitt, F. (2003). A Theoretical Model of Analysis of Rate Problems in Algebra. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3*, 9-16.

Heller, J. et Greeno, J. (1978). Semantic processing in arithmetic word problem solving. *Midwestern Psychological Association, Chicago, May*.

Houdement, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N, 71*, 7-23.

Houdement, C. (2011). *Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école.* Papier présenté à Annales de didactique et de sciences cognitives.

Jonnaert, P., Lauwers, A. et Peltier, E. (1990). Capacités et compétences des élèves au terme de l'enseignement secondaire général : construction et validation d'un outil. *Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation Laboratoire de Pédagogie Expérimentale*.

Jonnaert, P. et Pallascio, R. (1996). Les apprentissages mathématiques en situation. *Revue des sciences de l'éducation, 22*(2), 227-231.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 11-49.

Koedinger, K. R. et Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *The Journal of the Learning Sciences, 13*(2), 129-164.

Kouba, V. L. *et al.* (1988). Results of the fourth NAEP assessment of mathematics: Number, operations, and word problems. *The Arithmetic Teacher*, 14-19.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2012). Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec: un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 12*(2), 178-213.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2015). La notion de situation-problème en mathématiques au début du XXIe siècle au Québec: rupture ou continuité? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*(ahead-of-print), 1-36.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2016). La notion de situation-problème en mathématiques au début du XXIe siècle au Québec: rupture ou continuité? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 16*(1), 1-27.

Lane, S. (1991). Use of Restricted Item Response Models for Examining Item Difficulty Ordering and Slope Uniformity. *Journal of Educational Measurement*, *28*(4), 295-309.

Legendre, R. (2005). *Dictionnaire de l'éducation*. Montréal: Guérin.

Leon, R. E. (1992). *The effects of the presence of extraneous information in mathematical word problems on the performance of Hispanic learning-disabled students.* State University of New York at Buffalo.

Lester, F. (1980). Problem solving: Is it a problem. *Selected issues in mathematics education, 36*.

Leung, S. S. et Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal, 9*(1), 5-24.

Marchand, P. (2009). L'enseignement du sens spatial au secondaire: Analyse de deux leçons de troisième secondaire. *Canadian journal of science, mathematics, and technology education*, *9*(1), 29-48.

Marchand, P. et Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ, 39*(4), 30-42.

Marchand, P. et Bednarz, N. (2000). Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes. *Bulletin AMQ, 40*(4), 15-25.

Matz, M. (1982). *Towards a process model for high school algebra errors.* Papier présenté à Intelligent tutoring systems.

Mayer, R. E. (1981). Frequency norms and structural analysis of algebra story problems into families, categories, and templates. *Instructional Science, 10*(2), 135-175.

Mayer, R. E. (1983). *Thinking, problem solving, cognition*.

MELS. (2001). Éducation préscolaire et enseignement primaire *Programme de formation de l'école québécoise*. Québec: Ministère de l'Éducation, du loisir et du sport (MELS).

MELS. (2006). Enseignement secondaire, premier cycle *Programme de formation de l'école québécoise* (pp. 224-264). Québec: Ministère de l'Éducation, du loisir et du sport .

MEQ. (1988). Fascicule K. Guide pédagogique, primaire, mathématiques. Résolution de problèmes. Orientation générale. Québec: Ministère de l'Éducation du Québec.

Ministère de l'Éducation, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche (2015). Document d'information - Juin 2016 - Juillet 2016 - Janvier 2017 : Mathématique, 4e année du secondaire. Gouvernement du Québec

Moschkovich, J. N. (1992). *Making sense of linear equations and graphs: an analysis of students' conceptions and language use.* University of California, Berkeley.

Murray, T., Clermont, Y. et Binkley, M. (2005). Enquête internationale sur l'alphabétisation des adultes–mesurer la littératie et les compétences des adultes: des nouveaux cadres d'évaluation. *Statistique Canada*.

Muth, K. D. (1991). Effects of cuing on middle-school students' performance on arithmetic word problems containing extraneous information. *Journal of Educational Psychology, 83*(1), 173.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1): National Council of Teachers of Mathematics.

Nguala, J. B. (2006). Faire varier le contexte pour aider à la résolution de problèmes. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*(1), 177-186.

Nogry, S. et Didierjean, A. (2007). Les erreurs commises lors de la résolution du problème source favorisent-elles le transfert analogique? Un réexamen de la recherche de Gick et McGarry (1992). *Psychologie francaise, 52*(3), 341-353.

OCDE. (2013). Cadre d'évaluation et d'analyse du cycle PISA 2012 : Compétences en mathématiques, en compréhension de l'écrit, en sciences, en résolution de problèmes et en matières financières

Oliveira, I. et Camâra dos Santos, M. (2011). *Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec (CO).* Papier présenté à XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

Oliveira, I. et Rhéaume, S. (2014). Comment s'y prennent-ils? La résolution de problèmes de partage inéquitable par des élèves avant enseignement formel de l'algèbre. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 14*(4), 404-423.

Pallascio, R. (2005). Les situations-problèmes: un concept central du nouveau programme de mathématique. *Vie pédagogique, 136*(1), 32-35.

Porcheron, J.-L. (1998). *Production d'inférences dans la résolution de problèmes additifs.* Université de Paris.

Poupart, J. (1997). L'entretien de type qualitatif: considérations épistémologiques, théoriques et méthodologiques. *La recherche qualitative: enjeux épistémologiques et méthodologiques*, 173-209.

Radford, L. (1996). La résolution de problèmes dans la classe de mathématiques. *Revue du Nouvel Ontario, 18*, 11-34.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*(2), 257-277.

Radford, L. et Grenier, M. (1996). Entre les choses, les symboles et les idées; une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'éducation, 22*(2), 253-256.

Richard, P. R., Houdement, C. et Demonty, I. (2012). Comparaison de l'enseignement des mathématiques à travers les pays francophones: résultats, sens et usages.

Riley, M., Greeno, J. et Heller, J. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. *The development of mathematical thinking*, 153-196.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques, 18*(2), 139-189.

Robert, A. (2003). Tâches mathématiques et activités des élèves: une discussion sur le jeu des adaptations introduites au démarrage des exercices cherches en classe de collège. *Petit x, 62*, 61-71.

Roditi, E. (2007). *La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté.* Papier présenté à Annales de didactique et de sciences cognitives.

Roegiers, X. (2003). *Des situations pour intégrer les acquis scolaires*: De Boeck Supérieur.

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas. *Handbook of international research in mathematics education, 1*, 143-161.

Saboya, M. *et al.* (2013). *Résolution de problèmes écrits au moment de l'introduction de l'algèbre: analyse de productions d'élèves du premier cycle du secondaire*. Papier présenté à Actes du colloque GDM.

Savoie-Zajc, L. (2000). La recherche qualitative/interprétative en éducation. *Introduction à la recherche en éducation, 2*, 171-198.

Sayac, N. et Grapin, N. (2013). Facteurs de compétence et de complexité en mathématique: un outil au service de la formation des enseignants. *Actes du 25ème colloque de l'ADMEE-Europe Fribourg, Université Paris Est Créteil (IUFM) - Laboratoire de Didactique André Revuz*.

Schoenfeld, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics. *ZDM, 39*(5-6), 537-551.

Sebrechts, M. *et al.* (1996). Using algebra word problems to assess quantitative ability: Attributes, strategies, and errors. *Cognition and Instruction, 14*(3), 285-343.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 36.

Sheehan, K. M. (1997). A tree-based approach to proficiency scaling ans diagnostic assessment. *ETS Research Report Series, 1997*(1).

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base.* Université Laval.

Squalli, H., Mary, C. et Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre: cas du Québec et de l'Ontario. *Perspectives en éducation et formation, 1*, 65-78.

Thevenot, C., Barouillet, P. et Fayol, M. (2004). Représentation mentale et procédures de résolution de problèmes arithmétiques: L'effet du placement de la question. *L'année psychologique, 104*(4), 683-699.

Tremblay, M. et Saboya, M. (accepté). Kaléidoscope sur l'accroissement des problèmes de mise en égalité dans les manuels scolaires québécois. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation.*

Tremblay, M., Saboya, M. (sous presse). *Développement de la pensée algébrique dans les manuels du premier cycle du secondaire : analyse de la structure relationnelle des énoncés de problèmes s'inscrivant dans une approche par résolution de problèmes écrits visant l'expression d'un raisonnement analytique.* Rapport d'analyse.

Vergnaud, G. (1977). Activité et connaissance opératoire. *Bulletin de l'APMEP, 307*, 32-65.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, 39-59.

Verschaffel, L. et De Corte, E. (2008). Chapitre 6. La modélisation et la résolution des problèmes d'application: de l'analyse à l'utilisation efficace *Enseignement et apprentissage des mathématiques* (Vol. 2, pp. 153-176): De Boeck Supérieur.

Vlassis, J. et Demonty, I. (2002). *L'algèbre par des situations-problèmes*. Bruxelles: De Boeck.

Voyer, D. (2006). *L'influence de facteurs liés à l'élève ou à l'énoncé sur la compréhension en résolution de problèmes écrits d'arithmétique.* Université Laval.

Yerushalmy, M. (1991). Student perceptions of aspects of algebraic function using multiple representation software. *Journal of Computer Assisted Learning*, *7*(1), 42-57.