







# **IDENTIFICATION DE LA RAIDEUR DYNAMIQUE DES INTERFACES D'ISOLATION VIBRATOIRE PAR LES MÉTHODES D'INGÉNIERIES TPA**

Mémoire présenté

dans le cadre du programme de maîtrise en ingénierie

en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences appliquées (M. Sc. A.)

PAR

© **HOUSSINE BAKKALI**

**Septembre 2025**



**Composition du jury :**

**Professeur Nouredine Barka, président du jury, Université du Québec à Rimouski**

**Professeur Raef Cherif, directeur de recherche, Université du Québec à Rimouski**

**Professeur Mohamed Amine Ben Souf, examinateur externe, École Nationale  
d'Ingénieurs de Sfax**

Dépôt initial le 11/06/2025

Dépôt final le 03/09/2025



UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À RIMOUSKI  
Service de la bibliothèque

Avertissement

La diffusion de ce mémoire ou de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire « *Autorisation de reproduire et de diffuser un rapport, un mémoire ou une thèse* ». En signant ce formulaire, l'auteur concède à l'Université du Québec à Rimouski une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de son travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, l'auteur autorise l'Université du Québec à Rimouski à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de son travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits moraux ni à ses droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, l'auteur conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont il possède un exemplaire.





Je dédie ce travail à mes parents,  
mes frères et sœurs, et mes proches.



## REMERCIEMENTS

*Je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements à mon professeur encadrant, **Monsieur Raef Cherif**, pour son soutien indéfectible, ses conseils avisés et son expertise précieuse tout au long de ma maîtrise à l'UQAR. Votre engagement, votre patience et votre disponibilité ont été des sources d'inspiration et de motivation constantes. Vous avez su guider mes recherches avec rigueur et bienveillance, m'aidant à surmonter les défis et à affiner mes compétences. Vos encouragements et votre confiance en mes capacités ont joué un rôle déterminant dans l'achèvement de ce travail, et pour cela, je vous en suis profondément reconnaissant.*

*Je souhaite également remercier du fond du cœur mes parents, **Rachid et Fatima Zohra**, pour leur amour, leur soutien inconditionnel et leurs encouragements constants. Vous avez toujours cru en moi et m'avez soutenu dans chaque étape de ce parcours académique. Votre confiance et votre dévouement m'ont donné la force de persévérer et d'atteindre mes objectifs.*

*À mon frère **Adam** et à ma sœur **Narjiss**, merci pour votre soutien affectueux et votre compréhension. Vos paroles d'encouragement et votre présence réconfortante ont été essentielles pour moi durant cette période exigeante. Vous avez su m'apporter la motivation et la sérénité nécessaires pour mener à bien ce projet.*

*Je souhaite également exprimer ma gratitude à tout le département de l'ingénierie de l'UQAR pour leurs services impeccables. Un merci particulier au chef de département ainsi qu'à tout le personnel administratif et technique. Votre soutien logistique, vos conseils pratiques et votre disponibilité ont grandement facilité mon parcours.*

*Je suis profondément reconnaissant à chacun de vous pour votre rôle crucial dans l'achèvement de cette étape importante de ma vie. Vos contributions, qu'elles soient intellectuelles, émotionnelles ou morales, ont été inestimables, et je vous en suis éternellement reconnaissant. Merci pour tout.*



## RÉSUMÉ

L'industrie des transports intègre divers mécanismes générant des vibrations tonales qui se propagent à travers des isolateurs, produisant des bruits solidiens (SBN) dans l'ensemble du système. Ces bruits affectent le confort des passagers et l'intégrité des composants. L'amélioration et la maintenance préventive des interfaces d'isolation reliant les systèmes vibrants aux structures réceptrices peuvent atténuer ces vibrations indésirables.

Les méthodes d'analyse du chemin de transfert (TPA) sont des outils de diagnostic essentiels pour identifier les sources et les caractéristiques du bruit, des vibrations et de la rudesse (NVH) dans les véhicules. Cette étude présente une méthode TPA hybride permettant de caractériser les isolateurs de vibrations mécaniques in situ, sans démonter le système cible, lorsqu'ils sont intégrés dans un assemblage.

La méthode proposée combine deux approches de TPA (In-Situ basée sur les composants et la méthode de raideur) pour évaluer la rigidité de transfert translationnelle sur une large gamme de fréquences. La méthode In-Situ a été employée pour déterminer les forces aux interfaces, lesquelles ont ensuite servi à estimer la raideur dynamique des isolateurs à partir de la méthode de raideur.

Les performances de la méthode proposée ont été évaluées sur un système académique composé de deux plaques reliées par quatre ressorts. Une étude numérique a été menée pour améliorer l'identification des forces d'interface. Plusieurs paramètres ont été examinés et discutés, tels que le rejet des valeurs singulières ainsi que le nombre et la position des points indicateurs choisis et utilisés dans la matrice d'inversion.

Les résultats numériques montrent une bonne concordance entre les composantes de rigidité de transfert translationnelle prédites et les valeurs de référence.

**Mots clés :** Analyse du chemin de transfert, Isolateur mécanique, Méthode In-Situ, Raideur dynamique, NVH, Matrice d'inversion.



## ABSTRACT

The transportation industry incorporates various mechanisms generating tonal vibrations that propagate through isolators, producing structure-borne noise (SBN) throughout the system. These noises affect passenger comfort and the integrity of components. Improving and preventive maintenance of isolation interfaces connecting vibrating systems to receiving structures can mitigate these undesirable vibrations.

Transfer Path Analysis (TPA) methods are essential diagnostic tools for identifying the sources and characteristics of noise, vibration, and harshness (NVH) in vehicles. This study presents a hybrid TPA method to characterize mechanical vibration isolators in situ when integrated into an assembly without disassembling the target system.

The proposed method combines two TPA approaches (Component-based In-Situ and Stiffness Method) to evaluate translational transfer stiffness over a wide frequency range. The In-Situ method was employed to determine the interface forces, which were then used to estimate the dynamic stiffness of the isolators from the Stiffness Method.

The proposed method's performance was evaluated on an academic system consisting of two plates connected by four springs. A numerical study was conducted to improve the identification of interface forces. Several parameters were examined and discussed, such as the rejection of singular values and the number and position of indicator points chosen and used in the inversion matrix.

The numerical results show a good agreement between the predicted translational transfer stiffness components and the reference values.

**Keywords:** Transfer Path Analysis, Mechanical Isolator, In-Situ Method, Dynamic Stiffness, NVH, Inversion Matrix.





## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS.....	ix
RÉSUMÉ .....	xi
ABSTRACT.....	xiii
TABLE DES MATIÈRES.....	xv
LISTE DES TABLEAUX .....	xvii
LISTE DES FIGURES .....	xix
LISTE DES ABRÉVIATIONS, DES SIGLES ET DES ACRONYMES.....	xxii
LISTE DES SYMBOLES.....	1
CHAPITRE 1 INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	3
1.1 MISE EN CONTEXTE.....	3
1.2 PROBLEMATIQUE .....	5
1.3 OBJECTIFS.....	6
1.4 METHODOLOGIE .....	7
1.5 CONTRIBUTIONS ORIGINALES.....	8
1.6 STRUCTURE DU DOCUMENT .....	9
CHAPITRE 2 ÉTAT DE L'ART : LES MÉTHODES DE LA TPA .....	11
2.1 METHODES DE CARACTERISATION DE LA RAIDEUR DYNAMIQUE .....	11
2.1.1 Méthodes de mesures statiques [2],[3] .....	11
2.1.2 Méthode dynamique des quatre pôles [4],[5] .....	18
2.2 DEFINITION ET EMPLOI DE LA TPA .....	22
2.3 LES FAMILLES TPA.....	24
2.3.1 TPA classique.....	29

2.3.2 TPA basée sur les composantes .....	34
CHAPITRE 3 ÉTUDE DES MÉTHODES NVH .....	44
3.1 METHODES IN SITU ET OUTILS DE SIMPLIFICATION.....	45
3.1.1 La méthode In Situ.....	45
3.1.2 Pseudo inverse de Moore-Penrose.....	48
3.1.3 Décomposition en valeurs singulières .....	49
3.1.4 Conditionnement d'une matrice.....	51
3.2 METHODES DE LA RIGIDITE DYNAMIQUE DE SUPPORT – DYNAMIC MOUNT STIFFNESS.....	52
3.3 METHODE HYBRIDE DEVELOPEE .....	55
CHAPITRE 4 ÉTUDE NUMÉRIQUE ET RÉSULTATS.....	59
4.1 ÉTUDE NUMERIQUE .....	59
4.1.1 Objectifs et stratégie numérique .....	59
4.1.2 Présentation du système académique.....	60
4.1.3 Application de la force d'excitation.....	63
4.1.4 Extraction des RFRs .....	65
4.1.5 Simplification de la matrice d'admittances.....	66
4.2 RESULTATS ET ANALYSES.....	69
4.2.1 Objectif de l'analyse .....	69
4.2.2 Simulation avec différents positionnements des points indicateurs [34].....	70
4.2.3 Simulation avec différents nombres de points indicateurs [34].....	75
4.2.4 Précision des réponses reconstruites.....	79
4.2.5 Estimation de la raideur dynamique à travers la méthode hybride.....	80
4.2.6 Forces et limites de la méthode hybride .....	86
CHAPITRE 5 CONCLUSION GÉNÉRALE .....	88
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	91

## **LISTE DES TABLEAUX**

Tableau 1 Résumé comparatif des méthodes de caractérisation de la raideur dynamique .....	21
Tableau 2 Résumé et classification des méthodes présentées dans le cadre de la TPA .....	43
Tableau 3 Critère de conditionnement.....	51
Tableau 4 : Propriétés physiques du système académique [34].....	61



## LISTE DES FIGURES

Figure 1. Propagation du bruit solide (SBN) d'un navire vers l'environnement extérieur.....	4
Figure 2. Schéma d'analyse systématique et de résolution des problèmes NVH à travers la TPA.....	23
Figure 3. Le flux de travail de la TPA, illustré étape par étape pour deux familles TPA [1].....	25
Figure 4. TPA sur le système assemblé AB.....	26
Figure 5. TPA sur les sous-systèmes séparés A et B.....	28
Figure 6. TPA Classique Direct Force.....	30
Figure 7. TPA Classique Mount Stiffness.....	32
Figure 8. TPA Classique Inverse Method.....	33
Figure 9. CB-TPA: application de forces équivalentes au système assemblé AB.....	37
Figure 10. CB-TPA: Blocked Force.....	38
Figure 11. CB-TPA: Free Velocity.....	40
Figure 12. CB-TPA: In Situ.....	41
Figure 13. Système source-support-récepteur général.....	46
Figure 14. Système source-support-récepteur – Mount Stiffness.....	52
Figure 15. Système académique - Deux plaques en aluminium reliées par quatre ressorts (Simcenter 3D).....	60
Figure 16. Charge ponctuelle appliquée sur la plaque supérieure selon la direction Z. ....	62
Figure 17. Points de contact (noir) entre le sous-système passif B et les 4 isolateurs.....	63
Figure 18. La force appliquée sur les quatre points de contact avec la plaque réceptrice. ....	64

Figure 19. Plaque réceptrice – 48 points indicateurs (bleus et jaunes) et huit points cibles (rouges).....	70
Figure 20. Accélérations aux cibles no 1 et no 2 à l'aide des points indicateurs proches. ....	71
Figure 21. Accélérations aux cibles no 1 et no 2 à l'aide des points indicateurs éloignés. ....	73
Figure 22. Méthode in situ – Effet du nombre de points indicateurs sur la précision de reconstruction. ....	77
Figure 23. Forces reconstruites aux interfaces (axe Z) selon trois modèles de matrice.....	81
Figure 24. Réponses reconstruites à la cible 1 selon les trois axes. ....	82
Figure 25. Réponses reconstruites à la cible 2 selon les trois axes. ....	82
Figure 26. Raideur estimée pour la cible 1 selon l'axe Z.....	84
Figure 27. Raideur estimée pour la cible 2 selon l'axe Z.....	84



## **LISTE DES ABRÉVIATIONS, DES SIGLES ET DES ACRONYMES**

<b>TPA</b>	Transfer path analysis
<b>NVH</b>	Noise, vibration and harshness
<b>SBN</b>	Structure borne noise
<b>CB-TPA</b>	Component Based TPA
<b>DDL</b>	Degré de liberté
<b>FRF</b>	Frequency response function
<b>IS-D</b>	In Situ Direct
<b>FBS</b>	Frequency Based Substructuring
<b>FEM</b>	Finite element method
<b>DLF</b>	Damping loss factor
<b>SVD</b>	Singular Value Decomposition







## LISTE DES SYMBOLES

$L$	Longueur entre les appuis (m)
$F$	Charge appliquée (N)
$b$	Largeur de l'échantillon (m)
$h$	Épaisseur ou hauteur de l'échantillon (m)
$\delta$	Déformation maximale mesurée (m)
$\lambda$	Multiplicateurs de Lagrange représentant les forces de contact.



## **CHAPITRE 1**

### **INTRODUCTION GÉNÉRALE**

L'industrie des transports joue un rôle crucial dans la société moderne en facilitant le déplacement des personnes et des marchandises à travers divers systèmes de propulsion, notamment les moteurs. Cependant, ces moteurs peuvent générer des vibrations qui se propagent à travers la structure du véhicule par divers chemins, entraînant des problèmes de bruit, de vibration et de dureté (NVH).

#### **1.1 MISE EN CONTEXTE**

Les constructeurs des navires intègrent un grand nombre de systèmes qui sont responsables des vibrations tonales tels que les moteurs de propulsion et les groupes électrogènes générant des composantes tonales basse fréquence, les hélices responsables aussi des tonalités basse fréquence, appelés "bruit de raie", les systèmes hydrauliques provoquant des composantes tonales de moyenne à haute fréquence et les composantes électriques générant des harmoniques à haute fréquence.

Ces vibrations se propagent dans la structure et sont transmises par diverses voies et, par conséquent, rayonnent acoustiquement à l'intérieur de l'habitacle du navire et dans le milieu marin, respectivement. Si le chemin de transfert est aérien, le bruit est qualifié d'aérien. Cependant, si le chemin de transfert est structural, le bruit est qualifié de solidien, Figure 1 [1].

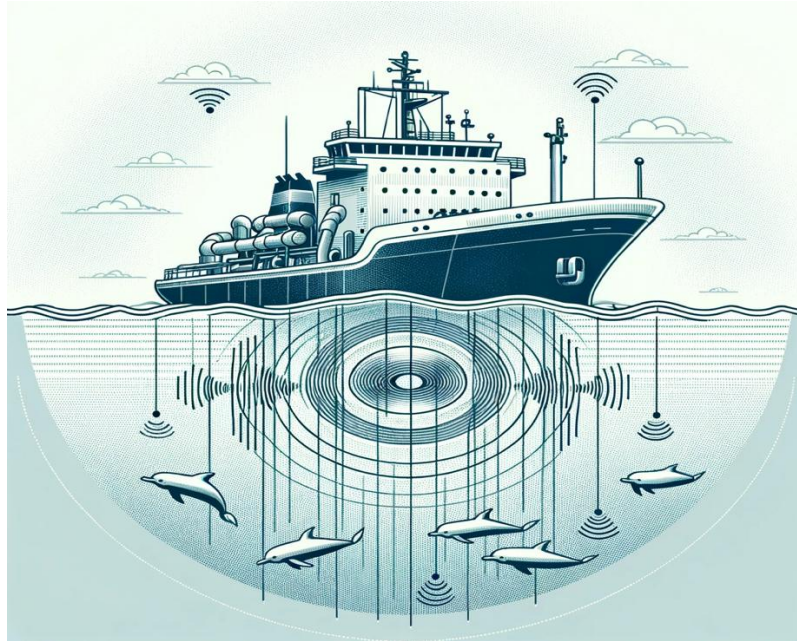


Figure 1. Propagation du bruit solidien (SBN) d'un navire vers l'environnement extérieur

Ce dernier représente le chemin le plus dominant de transfert de bruit provenant d'un navire en navigation connu sous le terme de « Structure Borne Noise » (SBN).

Il affecte le confort des passagers, perturbe la communication des membres d'équipage et surtout perturbe le comportement des mammifères marins vulnérables tels que les bélugas et les baleines, qui utilisent le son pour communiquer, naviguer, se nourrir et se reproduire.

Les normes internationales dans le domaine de maritime sont alors de plus en plus exigeantes à ce propos, et le confort des passagers n'est pas une affaire prise à la légère par les constructeurs des navires qui cherchent toujours des solutions pour atténuer ce bruit.

Cependant, ces bruits gênants (SBN) pourraient être atténués si les systèmes vibratoires, les structures réceptrices et leurs interfaces étaient soigneusement spécifiés et conçus dès la phase de développement du produit. De plus, une maintenance préventive des interfaces d'isolation joue un rôle crucial dans la réduction de ces vibrations indésirables.

L'analyse de la façon dont les vibrations sont transmises entre les composants est requise dans de nombreuses applications d'ingénierie. Par exemple, les ingénieurs automobiles doivent évaluer et classer la contribution des principales sources et chemins de bruit et de vibrations au niveau de bruit global à l'intérieur d'une voiture. Au cours des 50 dernières années, de nombreuses méthodes ont été développées pour effectuer des analyses dynamiques de structures complexes et analyser la transmission des vibrations mécaniques.

Certaines des méthodologies basées sur des tests les plus couramment utilisées sont les méthodes bien connues sous le nom d'analyse du chemin de transfert (TPA Transfert Path Analysis) [1]. Les méthodes TPA sont principalement utilisées comme outils de dépannage pour identifier les origines du bruit, des vibrations et de la dureté dans les véhicules. Elles sont utiles lorsque les mécanismes vibrants réels sont trop complexes pour être modélisés ou mesurés directement [1].

Elles nous permettent de détecter les voies dominantes de la transmission des vibrations, ce qui nous permet d'anticiper en apportant des modifications à la source elle-même (système actif), aux structures réceptrices (système passif) ou aux interfaces d'isolation (isolateurs mécaniques) dans le but de réduire certains types de bruits ou de vibrations indésirables.

## **1.2 PROBLEMATIQUE**

Les interfaces d'isolation jouent un rôle crucial pour réduire la transmission des vibrations indésirables à travers les structures et les composants, notamment dans les systèmes de propulsion des navires. Les moteurs de navire, souvent massifs et imposants, peuvent générer des niveaux élevés de bruit, de vibration et de dureté (NVH). Il est donc essentiel d'évaluer les performances des isolateurs dans des systèmes couplés, en tenant compte de la rigidité des autres composants avec lesquels ils seront associés.

Cependant, les méthodes actuelles de caractérisation, menées sur des bancs d'essai en laboratoire, ne prennent pas efficacement en compte l'effet du couplage avec le système réel.

Cette limitation entrave la prédiction précise de la dynamique des assemblages, ce qui est particulièrement critique pour des systèmes lourds comme les moteurs de propulsion des navires. En effet, l'amélioration des interfaces d'isolation et la maintenance préventive de celles-ci sont essentielles pour contrôler les bruits gênants (SBN).

À l'heure actuelle, aucun outil ni méthodologie d'évaluation n'est disponible ou utilisé pour prédire et/ou suivre l'évolution de la rigidité dynamique des isolateurs mécaniques, en particulier ceux des systèmes de propulsion maritime. Cette situation souligne la nécessité de développer une nouvelle méthode de caractérisation in situ des isolateurs mécaniques. Cette approche vise à permettre une amélioration continue et une maintenance préventive efficace des interfaces d'isolation, atténuant ainsi les vibrations indésirables et assurant un fonctionnement optimal des systèmes vibrants et des structures réceptrices.

Question de recherche : Est-il possible de développer une nouvelle approche pour caractériser in situ les isolateurs de vibrations mécaniques intégrés dans un assemblage, en utilisant les méthodes actuelles de TPA ?

### **1.3 OBJECTIFS**

L'objectif général de ce projet est de développer une approche TPA hybride combinant la méthode In-Situ et la méthode de raideur. Cette approche vise à évaluer la rigidité dynamique des isolateurs lorsqu'ils sont intégrés dans un assemblage. Les principaux objectifs sont; d'améliorer les interfaces d'isolation et de suivre l'évolution de leur rigidité dynamique pour atténuer efficacement les bruits gênants (SBN).

Pour atteindre cet objectif général, le travail sera organisé autour de cinq objectifs spécifiques :

1. Évaluer la méthode TPA In-Situ sur un système académique composé de deux plaques reliées par quatre ressorts.



2. Améliorer l'identification des forces d'interface issues de la méthode In-Situ en menant une étude paramétrique numérique pour évaluer l'impact du nombre et de la position des points indicateurs sur la matrice d'inversion, tout en analysant le rejet des valeurs singulières.
3. Évaluer la méthode de raideur sur le même système académique présenté au sous-objectif 1.
4. Développer une approche TPA hybride in-situ permettant d'évaluer la rigidité dynamique des isolateurs lorsqu'ils sont intégrés dans un assemblage.
5. Évaluer la méthode pour une application maritime.

#### **1.4 METHODOLOGIE**

Tout d'abord, une revue exhaustive de la littérature a été réalisée pour comprendre les méthodes classiques d'identification de la raideur dynamique et leurs applications et limitations dans les contextes industriels et mécaniques. Ensuite, une étude des méthodes TPA a été menée pour identifier les techniques les plus précises et les paramètres les plus appropriés. Cette démarche a permis d'établir une base solide pour développer une méthode de caractérisation des isolateurs de vibrations mécaniques in situ, en tenant compte de la dynamique des assemblages.

L'étape suivante a consisté à étudier les techniques d'analyse des chemins de transfert (TPA) pour sélectionner les méthodes les plus précises et les paramètres les mieux adaptés. Ce travail a permis de développer une méthode de caractérisation des isolateurs vibratoires en situation réelle, en tenant compte de la dynamique des assemblages.

Un modèle numérique a ensuite été élaboré à l'aide de SimCenter 3D pour tester la méthode TPA in situ sur un système académique constitué de deux plaques reliées par quatre ressorts. Cette phase a impliqué une analyse détaillée de plusieurs paramètres clés afin d'optimiser la précision et la stabilité des résultats. Le traitement des valeurs singulières a été

particulièrement étudié, car il est crucial de rejeter les valeurs inadéquates pour éviter les instabilités numériques et les résultats erronés lors de l'inversion matricielle. De plus, l'étude a examiné le nombre et le placement des points indicateurs, éléments essentiels dans la matrice d'inversion, pour minimiser les erreurs et améliorer la qualité des résultats.

Une fois les forces d'interface validées, elles ont été intégrées dans la méthode de raideur, qui se concentre sur la relation entre les forces d'interface et les déplacements relatifs pour estimer la raideur dynamique des isolateurs. Cette approche hybride permet une estimation plus précise et robuste de la raideur dynamique, capturant les effets complexes sur une large gamme de fréquences.

Enfin, la méthode hybride a été testée et validée sur deux types de raideurs : rigide et souple. Cette validation a confirmé son efficacité et sa capacité à fournir des analyses fiables et adaptées aux conditions réelles de fonctionnement.

## **1.5 CONTRIBUTIONS ORIGINALES**

L'originalité de ce projet réside dans sa capacité à combler le manque d'outils permettant de caractériser in situ la rigidité dynamique des isolateurs de vibrations mécaniques intégrés dans un assemblage. La nouvelle méthode proposée vise à repousser les limites des méthodes classiques tout en prenant en compte la complexité des structures.

Ce projet présente deux principales contributions originales :

**Amélioration des méthodes d'identification des forces d'interface :** Elle repose sur l'optimisation du traitement des valeurs singulières de la matrice de transfert. L'approche se concentre sur l'ajustement du nombre et du positionnement des points indicateurs, éléments clés pour renforcer la précision et la stabilité des résultats obtenus.

**Développement de la nouvelle méthode hybride :** Cette approche innovante combine deux techniques d'analyse des chemins de transfert (TPA) pour fournir une estimation précise et fiable de la raideur dynamique des isolateurs vibratoires en situation réelle (In situ). Elle

est particulièrement efficace pour les systèmes lourds complexes, surmontant ainsi les limitations des méthodes traditionnelles. La méthode a été validée avec succès, permettant des études directement sur le terrain sans interrompre le fonctionnement du système. Elle facilite ainsi une surveillance continue des performances des isolateurs vibratoires, rendant possible une maintenance préventive plus proactive et une optimisation constante. En détectant et en corrigeant rapidement les anomalies, cette méthode améliore la fiabilité des équipements et prolonge leur durée de vie.

## **1.6 STRUCTURE DU DOCUMENT**

Ce document est structuré en cinq chapitres, comprenant une introduction (premier chapitre) et une conclusion générale à la fin.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des méthodes de caractérisation existantes des isolateurs vibratoires. Il commence par une explication des principes de fonctionnement et des applications courantes de ces méthodes. Ensuite, une discussion approfondie sur leurs limitations est menée, mettant en évidence les défis rencontrés lors de leur utilisation dans des environnements industriels réels. Ces limitations justifient la nécessité de développer une nouvelle méthode plus adaptée, fondée sur l'analyse des chemins de transfert (TPA). La TPA est décrite en détail, en se concentrant sur ses différentes familles, notamment l'approche classique et l'approche par composants. L'accent est mis sur la manière dont ces méthodes ont été appliquées à divers systèmes mécaniques pour répondre aux besoins actuels de l'industrie.

Le troisième chapitre est dédié à la méthode in situ, avec une présentation détaillée de ses formules mathématiques. Le problème de l'inversion des matrices, crucial pour cette méthode, est également abordé, ainsi que diverses techniques de conditionnement. Une discussion sur leur application et leurs avantages dans le contexte de cette recherche est fournie. Ce chapitre explore également la méthode de raideur, en mettant l'accent sur ses formules mathématiques et son utilisation pour calculer la raideur dynamique des systèmes. Cette analyse approfondie servira de base à la présentation ultérieure de la nouvelle méthode

hybride, conçue pour surmonter les limitations des approches actuelles et offrir une solution plus robuste et précise pour l'évaluation des isolateurs vibratoires.

Le quatrième chapitre se concentre sur l'étude numérique et les résultats obtenus avec la nouvelle méthode hybride. Il commence par une présentation du modèle numérique, décrivant en détail l'utilisation de Simcenter 3D. La méthode in situ est d'abord appliquée pour extraire la force d'interface, suivie d'une analyse des études paramétriques réalisées pour vérifier l'exactitude des résultats obtenus. Ensuite, la méthode hybride est mise en œuvre pour évaluer les valeurs de la raideur obtenues et une comparaison est effectuée entre les valeurs imposées au modèle numérique et celles obtenues par la méthode hybride.

## **CHAPITRE 2**

### **ÉTAT DE L'ART : LES MÉTHODES DE LA TPA**

Ce chapitre examine la littérature existante sur les méthodes de caractérisation des isolateurs vibratoires, posant les fondations des travaux de ce projet de recherche. Les différentes approches de la méthode TPA, leurs limites, ainsi que l'importance de la méthode in situ et de la méthode de raideur, y sont présentées. Les principaux points abordés incluent:

- Les méthodes de caractérisation existantes pour évaluer la raideur des isolateurs vibratoires.
- La définition et l'importance de la méthode TPA dans ce contexte.
- Les différentes familles de TPA, en se concentrant sur les méthodes classiques et celles basées sur les composants, ainsi que leurs limitations respectives.

#### **2.1 MÉTHODES DE CARACTERISATION DE LA RAIDEUR DYNAMIQUE**

Cette section est consacrée aux méthodes existantes de caractérisation de la raideur dynamique, utilisées pour analyser les propriétés mécaniques et vibratoires des systèmes. Parmi ces approches, les méthodes de mesure statiques, telles que les essais de traction, de flexion ou de compression, sont couramment utilisées pour déterminer les caractéristiques mécaniques des matériaux. En complément, la méthode dynamique des quatre pôles offre une alternative permettant d'étudier les réponses des systèmes sous excitation dynamique. Ces méthodes seront explorées pour mettre en lumière leurs principes fondamentaux, leurs domaines d'application, ainsi que leurs avantages et limitations.

##### **2.1.1 Méthodes de mesures statiques [2],[3]**

Les **méthodes de mesure statiques** sont essentielles pour évaluer les propriétés mécaniques des matériaux et des structures en appliquant des charges ou des déformations progressives, puis en observant leur réponse. Ces méthodes permettent de déterminer des

paramètres tels que la raideur, le module d'élasticité et la résistance, sans considérer les effets dynamiques ou vibratoires.

#### 2.1.1.1 Essai de flexion

L'essai de flexion est une méthode simple et efficace pour évaluer la rigidité et la résistance d'un matériau lorsqu'il est soumis à une force perpendiculaire à sa surface. Il est souvent utilisé pour les matériaux destinés à des applications structurelles, comme les poutres, les plaques ou les matériaux composites.

- Principe de l'essai de compression

L'échantillon, généralement de forme rectangulaire ou cylindrique, est placé sur deux appuis. Une ou deux charges sont appliquées pour créer une déformation en flexion. Dans le cas d'un essai en trois points, une charge unique est placée au centre. Pour l'essai en quatre points, deux charges sont appliquées à des distances égales du centre, ce qui permet une meilleure répartition des contraintes.

Pendant le test, la charge appliquée et la déformation correspondante sont mesurées pour tracer une courbe reliant ces deux paramètres. Cette courbe permet d'évaluer les propriétés mécaniques, comme la rigidité (module d'élasticité en flexion) et la résistance à la rupture.

- Calculs essentiels

**Rigidité (module de flexion,  $E_f$ ) :** Le module d'élasticité en flexion est une mesure de la capacité du matériau à résister à la déformation. Il est calculé à partir de la pente initiale de la courbe charge-déformation.

$$E_f = \frac{L^3 F}{4bh^3 \delta} \quad (1)$$

- $L$  : Longueur entre les appuis (m)

- $F$  : Charge appliquée (N)
- $b$  : Largeur de l'échantillon (m)
- $h$  : Épaisseur ou hauteur de l'échantillon (m)
- $\delta$  : Déformation maximale mesurée (m)

**Résistance à la flexion ( $R_f$ )** : La résistance à la flexion est la contrainte maximale que le matériau peut supporter avant de se rompre. Elle se calcule comme suit :

$$R_f = \frac{3FL}{2bh^2} \quad (2)$$

- Avantages

Cet essai est relativement simple à réaliser, car il ne nécessite pas d'équipements complexes, ce qui le rend accessible pour de nombreuses applications. Il fournit des informations précieuses sur la rigidité et la résistance des matériaux, permettant ainsi une évaluation rapide et efficace de leurs performances mécaniques. De plus, il est largement applicable à une grande variété de matériaux, tels que les métaux, les plastiques, les composites et même les biomatériaux, renforçant son utilité dans divers domaines industriels et scientifiques.

- Limites

Les résultats de cet essai dépendent fortement de la géométrie de l'échantillon ainsi que de la présence éventuelle de défauts tels que des fissures ou des porosités, ce qui peut influencer la précision des mesures obtenues. De plus, cette méthode ne reflète pas toujours fidèlement les conditions réelles d'utilisation des matériaux dans des structures complexes, limitant ainsi son application dans certains cas spécifiques.

- Applications pratiques

Les essais de flexion sont couramment utilisés pour évaluer la performance des poutres et des structures dans les domaines du bâtiment et de l'ingénierie, où la rigidité et la résistance sont des critères essentiels. Ils permettent également de tester les propriétés mécaniques des matériaux composites, largement utilisés dans l'industrie automobile et aéronautique pour leur légèreté et leur robustesse. De plus, cette méthode est appliquée dans le domaine biomédical pour vérifier la qualité des matériaux, comme les implants osseux ou dentaires, afin d'assurer leur fiabilité dans des conditions d'utilisation réelles.

#### 2.1.1.2 Essai de compression

Les essais de compression permettent de mesurer la résistance et la rigidité d'un matériau lorsqu'il est soumis à une charge qui le comprime. Ce type d'essai est particulièrement utile pour les matériaux utilisés dans des applications où des forces de compression sont fréquentes, comme les colonnes, les supports ou les blocs de construction.

- Principe de l'essai de compression

Un échantillon, souvent de forme cylindrique ou cubique, est placé entre deux plaques d'une machine d'essai. Une force progressive est appliquée sur l'échantillon jusqu'à ce qu'il atteigne un point critique (rupture, déformation permanente ou autre critère défini). Les données mesurées incluent la charge appliquée et la déformation correspondante, permettant de tracer une courbe contrainte-déformation.

- Calculs essentiels

**Contrainte de compression ( $\sigma$ ) :** La contrainte est calculée en divisant la force appliquée ( $F$ ) par la surface initiale de l'échantillon ( $A$ ) :

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (3)$$

**Déformation unitaire ( $\epsilon$ ) :** La déformation unitaire est obtenue en mesurant la variation de longueur ( $\Delta L$ ) par rapport à la longueur initiale ( $L_0$ ) de l'échantillon :



$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (4)$$

**Module de compression (ou module de rigidité en compression,  $E_c$ ) :** Il est obtenu à partir de la pente de la courbe contrainte-déformation dans la zone élastique (déformation réversible) :

$$E_c = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (5)$$

- Types d'essais de compression

Les essais de compression peuvent être réalisés sous deux formes principales. La compression simple, où l'échantillon est soumis uniquement à une charge verticale, constitue le test le plus fréquemment utilisé grâce à sa simplicité. En complément, la compression triaxiale permet d'appliquer des charges sous plusieurs axes, ce qui est particulièrement utile pour simuler des conditions réelles dans des environnements complexes, comme les roches dans les tunnels ou les sols en génie civil.

- Avantages

Cette méthode offre des informations cruciales sur la capacité d'un matériau à résister à des charges compressives, ce qui en fait un outil essentiel pour évaluer sa performance mécanique. Elle est simple à mettre en œuvre et convient à une large gamme de matériaux, incluant les métaux, les polymères, les céramiques et les bétons. De plus, elle permet de déterminer les limites de charge des matériaux dans des conditions réelles, renforçant ainsi son utilité dans de nombreuses applications industrielles et scientifiques.

- Limites

Les résultats des essais de compression sont fortement influencés par la géométrie de l'échantillon, notamment sa hauteur et sa section transversale, ainsi que par ses imperfections, comme la porosité ou les fissures. Par ailleurs, ces essais nécessitent un équipement précis pour éviter les biais liés au flambage ou à des charges appliquées de manière excentrée, ce qui peut affecter la fiabilité des mesures.

- Applications pratiques

Les essais de compression trouvent des applications variées dans de nombreux domaines. Ils sont utilisés pour mesurer la résistance des matériaux de construction, comme les blocs de béton, les briques, et autres matériaux de maçonnerie. Dans le domaine des composants mécaniques, ces essais permettent d'évaluer les propriétés des ressorts, des joints ou des amortisseurs. Ils sont également essentiels en biomécanique pour vérifier la résistance des matériaux utilisés dans des implants ou des prothèses soumis à des charges compressives, garantissant ainsi leur fiabilité dans des conditions réelles d'utilisation.

#### 2.1.1.3 Essai de traction

L'essai de traction est une méthode fondamentale pour évaluer les propriétés mécaniques d'un matériau lorsqu'il est soumis à une force d'étirement. Cet essai permet de caractériser des paramètres importants comme la résistance à la traction, le module d'élasticité (ou module de Young), et l'allongement à la rupture.

- Principe de l'essai de traction

Un échantillon de matériau (souvent en forme de barre ou de plaque) est fixé entre deux mâchoires d'une machine d'essai. Une force est appliquée de manière progressive pour tirer l'échantillon dans une direction jusqu'à ce qu'il se rompe. Pendant cet essai, on mesure la charge appliquée et l'allongement correspondant de l'échantillon.

- Calculs essentiels

**Contrainte ( $\sigma$ )** : La contrainte est calculée en divisant la force appliquée ( $F$ ) par la section transversale initiale de l'échantillon ( $A_0$ ) :

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad (6)$$

**Déformation unitaire ( $\epsilon$ )** : La déformation unitaire est obtenue en rapportant l'allongement de l'échantillon ( $\Delta L$ ) à sa longueur initiale ( $L_0$ ) :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (7)$$

**Module de Young ( $E$ )** : Le module d'élasticité est calculé à partir de la pente de la courbe contrainte-déformation dans la zone élastique (avant déformation permanente) :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (8)$$

- Étapes de l'essai
  1. Préparation de l'échantillon : L'échantillon est usiné selon des normes spécifiques (par exemple, une section standardisée).
  2. Montage dans la machine : L'échantillon est fixé dans les mâchoires pour éviter tout glissement.
  3. Application de la charge : Une force croissante est appliquée jusqu'à la rupture de l'échantillon.
  4. Analyse des résultats : Une courbe contrainte-déformation est tracée pour déterminer les propriétés mécaniques.
- Paramètres mesurés
  - ✓ **Résistance maximale à la traction ( $\sigma_{max}$ )** : La contrainte maximale avant la rupture.
  - ✓ **Allongement à la rupture ( $\varepsilon_{rupture}$ )** : La déformation totale subie par l'échantillon jusqu'à sa rupture.
  - ✓ **Limite d'élasticité ( $\sigma_e$ )** : La contrainte maximale dans la zone élastique, au-delà de laquelle le matériau subit une déformation permanente.
- Avantages

Les essais de traction offrent une évaluation complète des propriétés mécaniques des matériaux soumis à des forces d'étirement, permettant une analyse précise de leur comportement. Ils sont universellement applicables à une grande variété de matériaux, tels que les métaux, les polymères, les composites et les céramiques, ce qui les rend indispensables dans de nombreux domaines industriels. De plus, leur mise en œuvre est facilitée par des normes internationales, garantissant des résultats standardisés et comparables.

- Limites

L'essai de traction présente certaines limites, notamment son caractère destructif, rendant l'échantillon inutilisable après le test. Les résultats obtenus dépendent également de manière significative des dimensions et de la préparation de l'échantillon, ce qui peut influencer leur fiabilité. Par ailleurs, cette méthode ne permet pas d'évaluer les propriétés mécaniques des matériaux lorsqu'ils sont soumis à des charges dynamiques, limitant ainsi son application dans certains contextes spécifiques.

- Applications pratiques

Les essais de traction sont largement utilisés dans diverses applications industrielles. Dans l'industrie métallurgique, ils permettent de vérifier les propriétés des métaux utilisés pour les infrastructures, les véhicules et les machines, garantissant leur performance et leur fiabilité. Dans les secteurs aéronautique et automobile, ils servent à contrôler la résistance des matériaux composites, essentiels pour des structures légères et robustes. Enfin, ces essais sont également appliqués aux polymères pour mesurer les performances des plastiques rigides dans des conditions de traction, afin d'assurer leur adéquation aux exigences mécaniques spécifiques.

### **2.1.2 Méthode dynamique des quatre pôles [4],[5]**

La méthode dynamique des quatre pôles, aussi appelée méthode matricielle des quatre pôles, est une technique largement utilisée pour caractériser la raideur dynamique des

systèmes mécaniques et des matériaux. Cette approche repose sur l'analyse des relations entre les forces et les déplacements aux deux extrémités d'un système, et elle est particulièrement adaptée pour les études dans des environnements dynamiques où les interactions vibratoires jouent un rôle clé.

- Fondements théoriques et principe

Le concept des quatre pôles s'appuie sur une modélisation matricielle, où un système mécanique est représenté comme une boîte noire connectée par deux points, un en entrée et un en sortie. Les relations entre les forces ( $F_1, F_2$ ) et les déplacements ( $X_1, X_2$ ) aux extrémités sont exprimées par une matrice de transfert dynamique, souvent notée  $[A, B, C, D]$ , selon l'équation :

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Les coefficients de cette matrice sont déterminés expérimentalement à partir des réponses en fréquence du système. Ils permettent de décrire les propriétés dynamiques du système, y compris la raideur, l'amortissement, et les interactions entre les éléments mécaniques.

- Applications et avantages

La méthode des quatre pôles se distingue par son utilité dans l'analyse des systèmes complexes, tels que les assemblages de pièces mécaniques, les joints ou les structures vibrantes. Elle est largement employée dans des domaines variés, notamment l'acoustique, l'analyse vibratoire et la conception de structures mécaniques. Cette méthode offre plusieurs avantages majeurs. Elle permet de caractériser les propriétés dynamiques des systèmes, comme la raideur et l'amortissement, en fonction de la fréquence, offrant ainsi une vision précise et détaillée de leur comportement. De plus, elle est particulièrement bien adaptée à la modélisation des structures complexes intégrant plusieurs sous-systèmes ou interfaces mécaniques. Enfin, grâce à l'utilisation de capteurs modernes et de bancs d'essai

sophistiqués, cette méthode garantit des mesures précises et fiables, renforçant sa pertinence dans les études dynamiques avancées.

- Limites et défis

Malgré ses nombreux avantages, la méthode des quatre pôles présente certaines limites et défis. Elle nécessite des équipements de haute précision pour mesurer les forces et les déplacements avec une résolution suffisante sur une large gamme de fréquences, ce qui peut complexifier sa mise en œuvre. De plus, les résultats obtenus sont sensibles aux conditions limites, notamment aux interfaces, où des facteurs tels que le serrage des joints ou les frottements peuvent influencer les mesures. Enfin, la qualité des résultats dépend fortement de la précision des modèles mathématiques utilisés pour interpréter les données expérimentales, rendant la modélisation un aspect crucial pour garantir la fiabilité des analyses.

Des études récentes ont montré l'efficacité de la méthode des quatre pôles pour analyser les joints mécaniques, les matériaux absorbants et les assemblages soumis à des vibrations. Cependant, cette méthode présente des limites importantes pour la caractérisation de la raideur dynamique, notamment sa sensibilité aux conditions limites et sa complexité expérimentale.

Tableau 1

Résumé comparatif des méthodes de caractérisation de la raideur dynamique

<b>Méthode</b>	<b>Conditions d'application</b>	<b>Avantages</b>	<b>Limitations</b>
Mesures statiques	Systèmes non dynamiques	Simple, précises dans des cas stables	Pas d'analyse des effets dynamiques
Méthode dynamique	Systèmes soumis à vibrations	Analyse à fréquences élevées, dynamique	Complexité et besoin d'équipements spécialisés

Ces deux approches sont complémentaires et doivent être choisies selon les spécificités du système ou matériau étudié mais ne permettent pas de mesurer avec précision la raideur dynamique des isolateurs utilisés dans des systèmes lourds, tels que les moteurs de navire. En outre, elles ne permettent pas un suivi continu de l'évolution de cette raideur au cours du temps, ce qui souligne la nécessité de concevoir une méthode de caractérisation **in situ** plus adaptée, reposant sur les méthodes TPA.

## **2.2 DEFINITION ET EMPLOI DE LA TPA**

La méthode d'Analyse des Chemins de Transfert (TPA) est cruciale pour décortiquer la complexité des interactions entre les sources de vibrations et les récepteurs dans un système mécanique [6]. Elle aide à identifier et quantifier les chemins empruntés par l'énergie vibratoire depuis les sources jusqu'aux récepteurs, et à évaluer l'impact de multiples sources sur la réponse globale. L'exploitation des mesures expérimentales physiques ou des données de simulation offre un cadre robuste pour modéliser ces chemins de transfert. Avec des informations précises sur les chemins de transfert requises à partir des capteurs installés dans les points critiques du mécanisme, l'optimisation des performances NVH devient une tâche bien définie. Les résultats obtenus de la TPA facilitent la conception optimisée des composants, permettant ainsi de sélectionner les caractéristiques désirables pour améliorer l'efficacité globale du système mécanique. La mise en lumière des chemins de transfert et des sources contributives est un pas en avant vers l'atténuation efficace du bruit et des vibrations, contribuant à une performance améliorée et un confort accru pour les utilisateurs.





Figure 2. Schéma d'analyse systématique et de résolution des problèmes NVH à travers la TPA.

L'analyse des chemins de transfert, ou TPA, est une méthode d'évaluation qui repose fondamentalement sur l'interaction de deux types de données : les charges, qu'elles soient dynamiques ou statiques, et les fonctions de réponse en fréquence (FRFs), qui peuvent caractériser soit des phénomènes acoustiques soit des phénomènes vibratoires. Ces données peuvent être recueillies à travers des expérimentations directes sur des prototypes physiques ou, alternativement, être issues de simulations numériques avancées. Cette dualité de sources d'informations ouvre la voie à une approche hybride, permettant de combiner les avantages de chaque méthode [7],[8].

La TPA trouve son application principalement dans la résolution de problèmes liés au bruit, à la vibration et à la rudesse (NVH), secteurs d'une importance capitale dans l'ingénierie des véhicules. En identifiant les chemins de transfert qui influencent de manière significative le comportement NVH à l'intérieur d'un compartiment de véhicule, elle permet aux ingénieurs de concentrer leurs efforts sur les zones problématiques et de développer des solutions optimisées pour les atténuer ou les éliminer.

La TPA, ou analyse des chemins de transfert, se divise en plusieurs familles, mais l'étude se concentrera sur deux approches principales : les **méthodes TPA classique** et les **méthodes TPA à base de composants**. Ces deux méthodes jouent un rôle essentiel dans l'évaluation des vibrations et du bruit au sein de systèmes complexes. La TPA classique est largement utilisée pour analyser les chemins de transfert globaux, tandis que la TPA à base de composants permet de décomposer les contributions individuelles de chaque élément du système, offrant ainsi une analyse plus détaillée. Ces deux méthodes seront explorées dans la sous-section suivante, avec une présentation de leurs principes, avantages et limitations [1].

## 2.3 LES FAMILLES TPA

Dans le domaine de l'Analyse des Chemins de Transfert (TPA), de nombreuses méthodes ont été développées pour examiner et atténuer la propagation du bruit et des vibrations au sein de systèmes mécaniques complexes. Cette étude sera concentrée

principalement sur deux familles significatives : la TPA Classique et la TPA basée sur les composants.

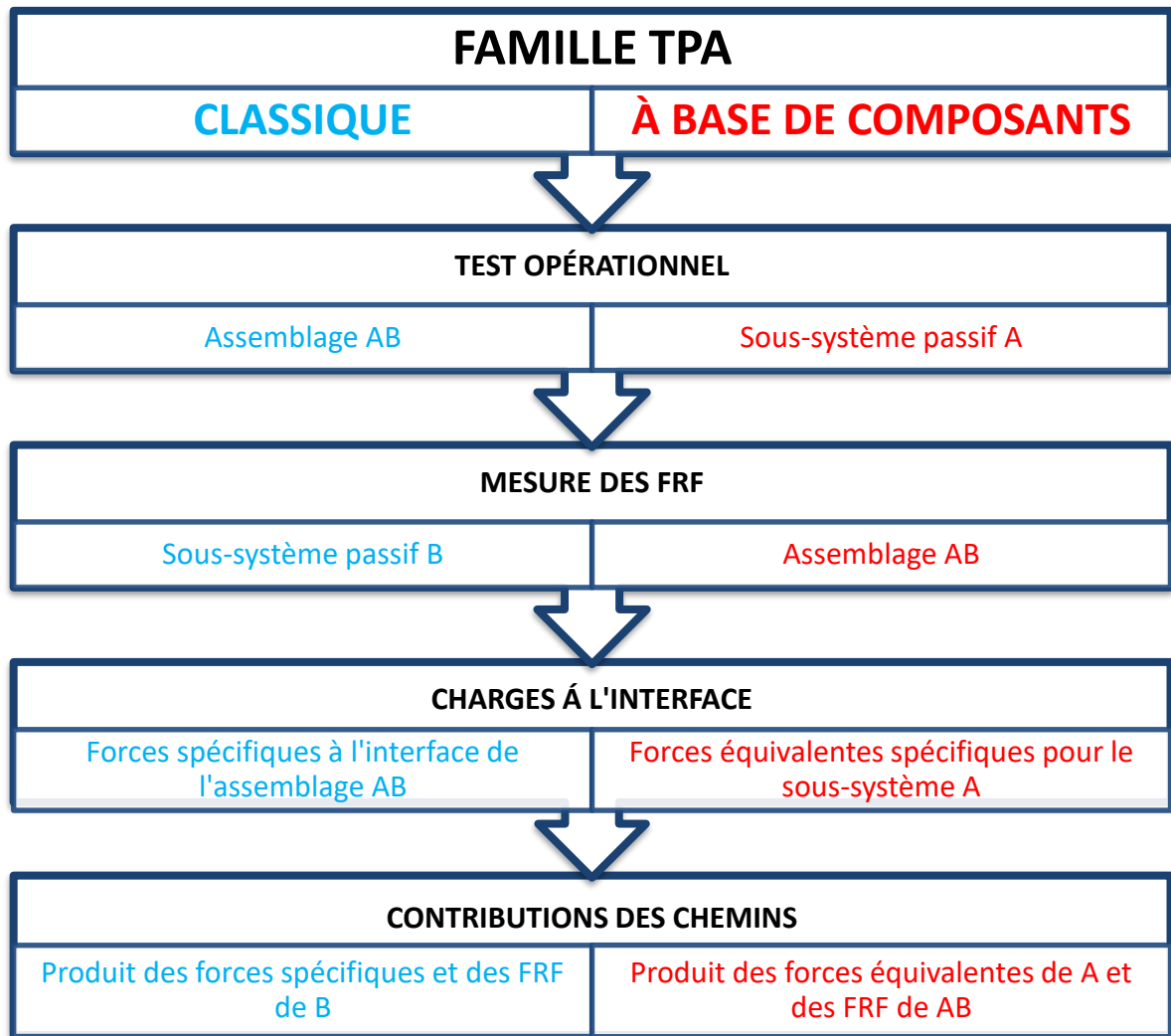


Figure 3. Le flux de travail de la TPA, illustré étape par étape pour deux familles TPA [1]

La partie suivante est consacrée à l'analyse des méthodes de TPA basées sur les admittances, qui se déclinent en deux approches principales : la **TPA par admittance des systèmes assemblés** et la **TPA par admittance des sous-systèmes**. Ces deux méthodes s'appuient sur les propriétés dynamiques des systèmes pour évaluer les chemins de transfert de vibrations et de bruit. La TPA par admittance des systèmes assemblés considère

l'ensemble du système comme une entité unique, tandis que la TPA par admittance des sous-systèmes décompose le système en éléments individuels pour analyser leurs contributions spécifiques. Ces deux approches seront examinées en détail, en mettant en lumière leurs principes fondamentaux et leur applicabilité dans des contextes variés.

- **TPA par l'admittance du système assemblé :**

On considère un système assemblé AB, composé d'un sous-système actif A ou on applique une force d'excitation  $f$  au nœud 1, un sous-système passif ou on cherche les réponses au niveau du nœud 3 et un isolateur mécanique M qui connecte les deux sous-systèmes à travers le nœud 2 situé au niveau de l'interface d'isolation.

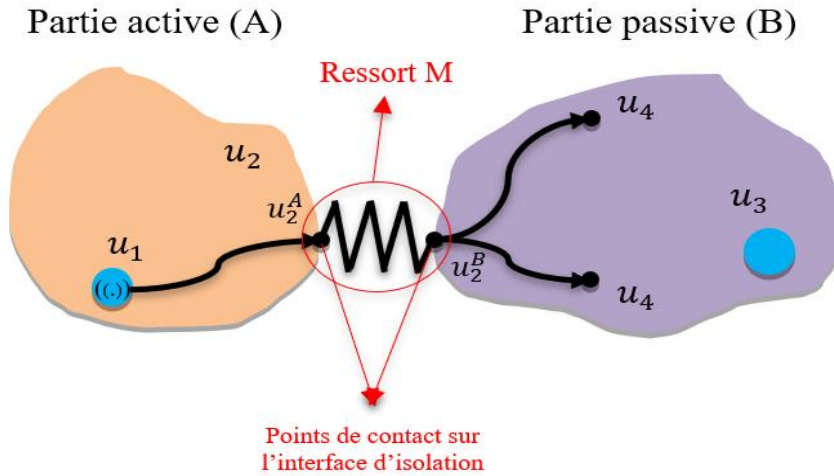


Figure 4. TPA sur le système assemblé AB

Les équations de mouvement de l'ensemble AB :

$$\begin{bmatrix} Z_{11}^A & Z_{12}^A & 0 & 0 \\ Z_{21}^A & Z_{22}^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{22}^B & Z_{23}^B \\ 0 & 0 & Z_{32}^B & Z_{33}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2^A \\ u_2^B \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$Z_{ij}$  Représente la matrice de rigidité dynamique appartenant au sous-système  $ij$  dans A ou B.

Les réponses obtenues au côté actif sont obtenues par une superposition des contributions individuelles, c'est-à-dire les spectres des forces d'excitation multipliés par leurs fonctions de transfert linéaires respectives, qui sont contenues dans les colonnes de la matrice des FRFs d'admittance  $Y_{AB}(\omega)$ [1].

$$u_i(\omega) = \sum_j Y_{ij}^{AB}(\omega) f_j(\omega) \Rightarrow u_3(\omega) = Y_{31}^{AB}(\omega) f_1(\omega) \quad (11)$$

- **TPA par l'admittance des sous-systèmes :**

Le système global, comme le démontre la Figure 4, est segmenté en sous-systèmes distincts A et B. Chaque sous-système est alors caractérisé par sa propre matrice de fonctions de réponse en fréquence (FRF), organisée en blocs diagonaux. En conséquence, la matrice  $Y^{AB}$ , qui représentait initialement l'ensemble du système, est divisée en deux :  $Y^A$  pour le sous-système actif et  $Y^B$  pour le sous-système passif B. Cette démarche facilite l'analyse spécifique de chaque sous-système au sein de la structure globale.

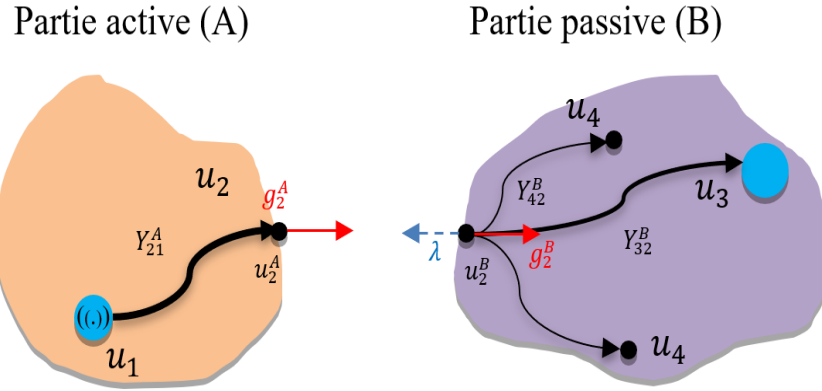


Figure 5. TPA sur les sous-systèmes séparés A et B

Avec :  $g_2^A$  et  $g_2^B$  les forces d'interface du côté A et côté B respectivement.

Les équations de mouvement du système désassemblé :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2^A \\ u_2^B \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^A & Y_{12}^A & 0 & 0 \\ Y_{21}^A & Y_{22}^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{22}^B & Y_{23}^B \\ 0 & 0 & Y_{32}^B & Y_{33}^B \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_2^A \\ g_2^B \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (12)$$

Les forces  $g_2^A$  et  $g_2^B$  sont à déterminer.

En cas de l'absence d'une masse supplémentaire entre les deux sous-systèmes, on considère que les forces d'interface des deux cotées sont égales et opposées  $g_2^A = -g_2^B = \lambda$ . On surligne aussi que si la condition de compatibilité ( $u_2^A + u_2^B = 0$ ), on peut écrire l'expression de la réponse au point cible en fonction des admittances des sous-systèmes [1] :

$$g_2^A = (Y_{22}^A + Y_{22}^B)^{-1} Y_{21}^A f \quad (13)$$

$$\text{Et :} \quad u_3 = Y_{32}^B g_2^B = Y_{31}^A f \quad (14)$$

### 2.3.1 TPA classique

La TPA classique, ou Analyse de Chemin de Transfert Classique, est une méthode largement reconnue et utilisée pour identifier les contributions des différentes voies de transfert dans les produits existants, notamment dans l'ingénierie automobile pour résoudre les problèmes de NVH (bruit, vibration et rudesse). Cette approche implique de mener des tests opérationnels sur le produit assemblé AB pour déterminer les forces d'interface entre les côtés actifs A et passifs B [9],[10]. Les isolateurs M montés, entre ces deux éléments possèdent une rigidité spécifique qui doit être préservée afin que le mécanisme fonctionne tout en transmettant une énergie vibratoire réduite. Et les forces d'interface  $\lambda$  servent à établir les réponses du côté récepteur  $u_3$  [1],[11], déterminant ainsi le comportement vibratoire en ces points et cela selon l'équation suivante :

$$u_3 = Y_{32}^B g_2^B \quad (15)$$

Les méthodes classiques de l'Analyse des Chemins de Transfert (TPA) est efficace mais chronophage en raison de la nécessité de procéder à des mesures pratiques étendues. Pour déterminer les charges opérationnelles, il est essentiel de mesurer les Fonctions de Réponse en Fréquence (FRF) locales et d'ajouter des indicateurs en nombre double par rapport aux charges, ce qui prolonge le temps nécessaire pour les mesures opérationnelles [12],[13]. Ces indicateurs  $u_4$ , positionnés autour des chemins de transfert, servent à enregistrer les réponses opérationnelles et à anticiper le comportement vibroacoustique.

Il faut noter que la réalisation d'une matrice complète de Fonctions de Réponse en Fréquence (FRFs) est une tâche complexe, nécessitant souvent le démontage du sous-système actif, ce qui peut engendrer une erreur au niveau de la condition limite du modèle. Pour élaborer un modèle de TPA exhaustif, il est recommandé d'éviter de réaliser des mesures supplémentaires au-delà des mesures opérationnelles. Cette exigence rend la méthode classique de TPA particulièrement onéreuse pour les entreprises, surtout en termes de temps requis pour les tests [14],[15].

Parmi les méthodes de la TPA classique les plus pertinentes, on trouve la méthode Direct Force, la méthode Mount Stiffness et Inverse Method [1]. Ces deux dernières se distinguent par leur capacité à modéliser de manière efficace les comportements dynamiques complexes. Ces méthodes, en exploitant des formules matricielles avancées, ouvrent la porte à une analyse plus approfondie et à une meilleure compréhension des phénomènes vibratoires en jeu, établissant ainsi un pont solide entre la théorie et la pratique dans l'analyse des systèmes mécaniques.

### Méthode de TPA classique – Direct Force :

La méthode la plus directe pour déterminer les forces d'interface  $g_2^B$  implique leur mesure immédiate à l'aide de capteurs de force installés entre les composants actifs et passifs.

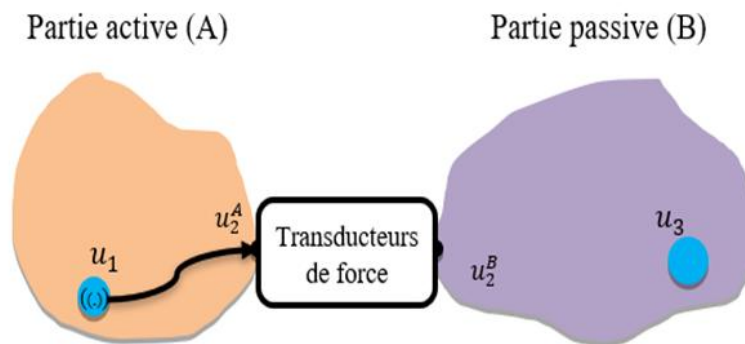


Figure 6. TPA Classique Direct Force

Cette technique est applicable uniquement dans le cas où les déplacements à l'interface entre les sous-systèmes A et B sont égaux et on écrit ( $u_2^A = u_2^B$ ).

Cette condition reflète la continuité physique des déplacements à l'interface entre les sous-systèmes. Dans un système couplé, les points de contact partagés par les sous-systèmes A et B doivent avoir le même déplacement pour que les forces d'interface soient correctement transférées. Si cette condition n'est pas respectée, les forces mesurées ne correspondront pas aux forces réellement transmises à travers l'interface ce qui exige que la rigidité des



transducteurs soit nettement supérieure à celle du système pour la plage de fréquences concernée [1].

M. van der Seijs, D. de Klerk, et D.J. Rixen, dans leur article "*Transfer Path Analysis: A Review of Theory and Application*", ont examiné en détail la méthode de la force directe, en mettant en évidence son efficacité dans l'identification et la quantification des forces d'interface dans des systèmes complexes. Ils ont démontré que cette méthode offre une précision remarquable pour évaluer les chemins de transfert, ce qui en fait un outil précieux pour les applications industrielles où la gestion des vibrations et du bruit est cruciale.

Cependant, plusieurs limitations ont été identifiées. La difficulté d'installer des capteurs dans des environnements opérationnels, en particulier dans des zones inaccessibles ou confinées, constitue un obstacle majeur. De plus, la précision des mesures peut être affectée par des perturbations environnementales telles que les vibrations ambiantes ou les fluctuations de température, entraînant des erreurs potentielles dans les résultats. Enfin, le coût élevé des capteurs et de leur intégration dans les systèmes limite l'applicabilité de cette méthode à grande échelle, en particulier dans les environnements industriels où les ressources sont souvent contraintes

### **Méthode de TPA classique – Mount Stiffness :**

La méthode de la raideur dynamique (Dynamic Stiffness Method) utilise la notion de raideur dynamique de transfert pour modéliser l'interface. Cette approche est particulièrement efficace dans les systèmes équipés d'un isolateur vibratoire (ressort M) dont les caractéristiques sont déjà établies. Dans cette technique, les forces exercées au niveau de l'interface sont déterminées en employant la matrice de la raideur dynamique notée  $Z^{mt}$ , et en prenant en compte les déplacements observés au niveau des deux côtés de l'isolateur ;  $u_2^A$  et  $u_2^B$ .

$$\text{Et on écrit :} \quad g_2^B = Z^{mt}(u_2^A - u_2^B) \quad (16)$$

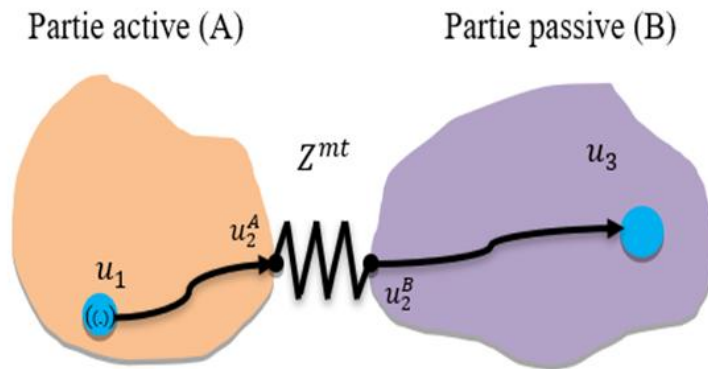


Figure 7. TPA Classique Mount Stiffness

A. de Boer et H. Nijmeijer, dans leur article "*Application of the Mount Stiffness Method in Transfer Path Analysis*", ont examiné en profondeur l'application de la méthode de la raideur des montages pour estimer les forces aux interfaces à partir des données de raideur. Leur étude a mis en évidence l'efficacité de cette méthode dans la modélisation des systèmes dynamiques, en particulier pour analyser les chemins de transfert de vibrations dans des environnements complexes.

Cependant, les auteurs ont identifié des limites importantes, notamment la variabilité des propriétés de raideur en fonction des conditions de fonctionnement telles que la fréquence, la charge et la température. Ces variations peuvent réduire la précision des estimations et compliquer leur application dans des contextes industriels où les conditions sont souvent imprévisibles. Pour y remédier, ils ont proposé des stratégies visant à améliorer la robustesse de la méthode, notamment par le biais de modèles adaptatifs capables de tenir compte des fluctuations des raideurs dans des environnements réels.

La méthode de **Mount Stiffness** reste cruciale pour estimer les forces aux interfaces à partir des données de raideur et des déplacements observés. Bien que cette méthode soit sujette à des variations en fonction des conditions de fonctionnement (fréquence, charge, etc.), elle demeure un outil puissant dans la modélisation des systèmes complexes.

L'importance de ces méthodes réside dans leur capacité à fournir des données essentielles pour une analyse robuste et fiable des systèmes NVH (bruit, vibrations, et dureté), tout en permettant une meilleure prédiction des performances des systèmes dans des environnements industriels.

### Méthode de TPA classique – Inverse Method :

Cette approche implique de déterminer les forces d'interface en se basant sur les réponses opérationnelles du système couplé (Points Indicateurs) à des emplacements proches des interfaces ( $u_4$ ). Elle prend également en compte l'admittance du système découplé  $Y_{42}^B$ , notée, qui fait le lien entre ces réponses et les points d'interface :

$$g_2^B = (Y_{42}^B)^+ u_3 \quad (17)$$

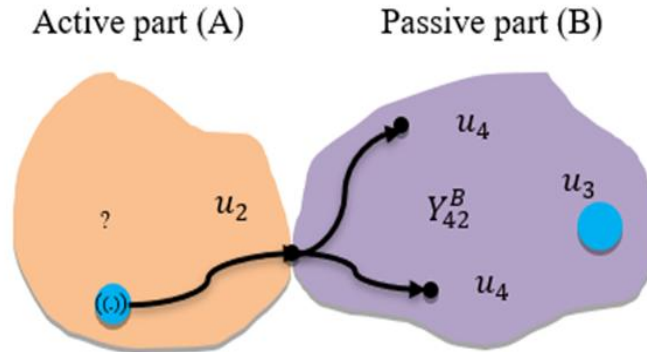


Figure 8. TPA Classique Inverse Method

$(Y_{42}^B)^+$  Représente le pseudo-inverse de l'admittance  $Y_{42}^{AB}$  tel que  $(Y_{42}^B)^+ Y_{42}^B = I$  tel que la matrice  $I$  est la matrice unitaire.

J. Sarradj et C. Fritzsche, dans leur publication "*Inverse Method for Transfer Path Analysis: A Comparative Study*", ont réalisé une analyse comparative des différentes approches de la méthode inverse, en mettant l'accent sur leurs performances en termes de stabilité et de précision. Ils ont démontré que cette méthode est puissante pour identifier et

quantifier les forces d'interface, mais qu'elle est également sujette à des défis importants, notamment liés à l'inversion de matrices mal conditionnées.

Les auteurs ont mis en évidence que lorsque les matrices utilisées dans cette méthode sont instables ou insuffisamment contraintes, les résultats peuvent devenir incohérents ou peu fiables. Pour résoudre ces problèmes, ils ont exploré des techniques de régularisation, comme la décomposition en valeurs singulières (SVD), qui permettent de stabiliser l'inversion et d'améliorer la robustesse des calculs. Ces travaux mettent en lumière les forces et les faiblesses de la méthode inverse, tout en proposant des solutions pour surmonter ses limitations, ce qui en fait une contribution importante pour l'amélioration des approches classiques de TPA dans des environnements industriels complexes.

### **2.3.2 TPA basée sur les composantes**

Pour anticiper les impacts d'un changement de conception dans le sous-système passif B, il est nécessaire de réaliser de nouveau le test opérationnel. En conséquence, les forces d'interface mesurées pour la configuration AB ne sont pas réutilisables si la partie passive est modifiée. Cela souligne l'utilité de l'Analyse des Chemins de Transfert (TPA) par composants.

Cette méthode vise à définir la force d'excitation en termes des forces spécifiques au sous-système actif A. Les réponses du sous-système passif peuvent être déduites en appliquant ces forces aux Fonctions de Réponse en Fréquence (FRFs) du système assemblé AB, mais en l'absence de la source active [1],[16],[17].

L'approche CB-TPA (*Component-Based TPA*) permet de déterminer en amont les contributions des différents éléments de la source, grâce à des mesures réalisées sur des bancs d'essai spécifiques [1],[16],[18]. Ces données sont ensuite combinées avec des fonctions de transfert pour anticiper les réactions vibratoires et/ou acoustiques ressenties par l'utilisateur du système concerné. Cette méthode de TPA basée sur les composants aide les ingénieurs à obtenir des représentations modulaires de chaque pièce séparément. Ainsi, les vibrations

émanant de la source et affectant la structure active sont caractérisées soit par les forces bloquées, soit par les accélérations au niveau de l'interface.

Pour déterminer les réactions du côté passif B, ces forces sont appliquées aux FRFs du système, où la partie active A est considérée immobile.

Cette méthode peut être exprimée de manière directe en utilisant l'admittance  $Y_{32}^{AB}$ .

$$u_3 = Y_{32}^B f_2^{eq} \quad (18)$$

En termes concrets, la TPA basée sur les composants est un outil utile pour les entreprises visant à définir les caractéristiques d'une structure active au sein d'un système mécanique soumis à des excitations. Cela se fait en utilisant un banc d'essai spécifique situé dans leur propre laboratoire, permettant ainsi de prévoir les réponses vibratoires et/ou acoustiques du système assemblé AB. Habituellement, les propriétés identifiées pour la structure active A d'un ensemble peuvent être appliquées de manière similaire à d'autres structures passives B du même système.

**Notion de la force équivalente :** La TPA basée sur les composants facilite la simulation des niveaux de vibration de divers composants dans de nouveaux systèmes. Les forces équivalentes, illustrées dans la figure 8 (à noter que l'utilisation de la notation  $u_2$  indique que les deux points 2A et 2B coïncident en l'absence de liaison mécanique entre les structures A et B), définissent l'excitation provenant de la source et sont intrinsèquement liées à la structure active. Ces forces représentent les contraintes exercées sur l'interface du système assemblé AB en état de repos, c'est-à-dire lorsque la source d'excitation est désactivée.

La force équivalente  $f_2^{eq}$  représente la force agissant à l'interface. Les réactions observées aux points récepteurs en utilisant ces forces équivalentes devraient correspondre aux réponses obtenues aux mêmes endroits lorsque la source était en fonctionnement, conformément à la référence [1].

Les forces équivalentes peuvent être définies de manière directe en employant l'admittance du système assemblé  $Y_{32}^{AB}$ , ou de manière plus élaborée en utilisant les admittances des sous-systèmes A et B [1].

$$f_2^{éq} = (Y_{32}^B)^{-1}u_3 = (Y_{32}^B(Y_{22}^A + Y_{22}^B)^{-1}Y_{22}^A)^{-1}u_3 \quad (19)$$

Les réponses obtenues par les forces équivalentes doivent être égales à celles obtenues dans le cas où la source était active, ce qui donne :

$$f_2^{éq} = (Y_{22}^A)^{-1}Y_{21}^A f \quad (20)$$

Cette équation montre clairement que les forces équivalentes sont définies par des facteurs exclusifs à la structure active. Toutefois, elles ne reflètent fidèlement les réactions qu'au niveau de la structure de réception ou de l'interface. Les réponses du côté passif B résultent uniquement des forces appliquées à l'interface. Cependant, les réactions observées sur la source seront différentes, car elles découlent à la fois de l'impact direct de la force d'excitation  $f$  et de son interaction à l'interface avec le sous-système couplé B, comme indiqué dans les références [1],[16],[19].

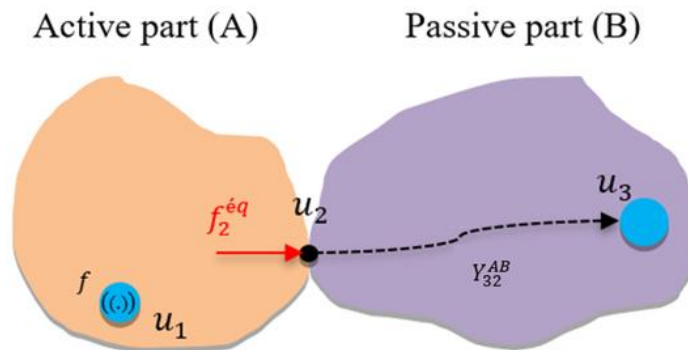


Figure 9. CB-TPA: application de forces équivalentes au système assemblé AB

La TPA est utilisée pour répondre à divers besoins exprimés par les ingénieurs, tels que l'identification des sources d'excitation significatives ou dominantes dans une structure, ainsi que la détermination de celles qui contribuent ou se neutralisent mutuellement [20].

Pour aborder ces enjeux, des méthodes basées sur la force sont employées pour caractériser les sources, identifier leurs chemins de transfert et leurs réponses. Bien que cette force puisse être mesurée directement à l'aide de capteurs de force, les tests complexes exigent parfois des modifications du système pour permettre les mesures nécessaires. À ce stade, les forces peuvent être déterminées soit par inversion de la matrice de mobilité de transfert, soit en utilisant la méthode de rigidité du montage... [20].

L'importance et l'utilité de la TPA basée sur les composants, ainsi que le principe de la force équivalente, ont été explorées pour définir et anticiper les comportements vibratoires et acoustiques des différents composants d'un système mécanique. À présent, l'attention sera portée sur les méthodes spécifiques utilisées dans ce cadre afin d'approfondir la compréhension de leur application. Ces méthodes, notamment la méthode des forces bloquées (*Blocked Force*), la vitesse libre (*Free Velocity*) et la méthode In-Situ, constituent les piliers de l'Analyse des Chemins de Transfert à base de composants. Chacune de ces techniques offre une perspective unique et des avantages spécifiques dans l'étude des

interactions entre les sous-systèmes actifs et passifs, et dans la prédiction précise des réponses du système.

### CB-TPA – Blocked Force :

La méthode en question implique de fixer rigidement l'interface du sous-système actif. En partant de l'hypothèse  $u_2^A = 0$ , l'excitation  $f$  est intégralement représentée par les forces de réaction présentes à l'interface bloquée, notées  $g_2^{bl}$ .

Cette approche est reconnue comme la plus populaire parmi les méthodes CB-TPA grâce à sa simplicité d'application. Néanmoins, elle repose sur l'hypothèse d'une interface parfaitement rigide dans toutes les directions, ce qui fait que sa précision est étroitement liée à la rigidité du banc d'essai par rapport au sous-système actif [21],[22],[23].

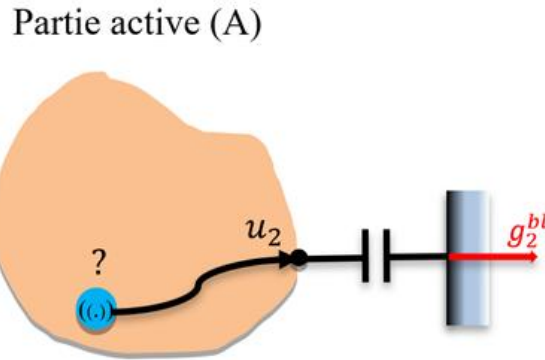


Figure 10. CB-TPA: Blocked Force

On déduit l'expression des forces équivalentes à partir de l'équation (12) de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^A & Y_{12}^A \\ Y_{21}^A & Y_{22}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g_2^A = -g_2^{bl} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} g_2^{bl} = (Y_{22}^A)^{-1} Y_{21}^A f \\ f_2^{eq} = g_2^{bl} \end{cases} \quad (21)$$



A.T. Moorhouse, A.S. Elliott et T.A. Evans, dans leur article "*In situ measurement of the blocked force of structure-borne sound sources*", ont exploré la méthode de la force bloquée, en montrant comment cette approche permet de mesurer directement les forces de transmission à l'interface d'un composant. Leur travail a mis en lumière l'avantage principal de cette méthode : son indépendance vis-à-vis des conditions de montage, ce qui en fait un outil particulièrement utile pour caractériser les sources dans des environnements variés.

Cependant, les auteurs ont également identifié plusieurs limitations importantes. Ils ont souligné que les variations des conditions expérimentales, telles que les vibrations ambiantes ou les fluctuations des paramètres d'installation, peuvent affecter la précision des mesures. De plus, ils ont noté la difficulté de modéliser avec exactitude les environnements opérationnels, ce qui peut introduire des incertitudes dans les résultats obtenus.

#### **CB-TPA – Free Velocity :**

La contrepartie directe de la méthode Blocked Force est la TPA Free Velocity. Dans ce cas, les interfaces des composants sont laissées libres, de sorte que toutes les vibrations sont considérées comme des « déplacements libres »  $u_2^{free}$  aux DDL de l'interface. À partir de là, il est possible de calculer des forces équivalentes en inversant l'admittance mesurée aux interfaces du sous-système libre  $Y_{22}^A$  [1]. Cette démarche peut être comprise en comparant les déplacements libres avec la définition de la force bloquée de l'équation (20).

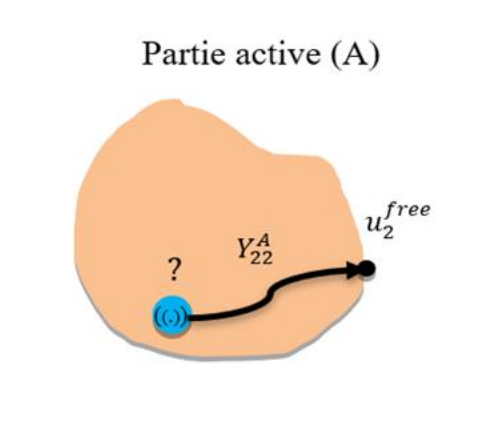


Figure 11. CB-TPA: Free Velocity

Une fois  $u_2^{free}$  identifié, les forces équivalentes peuvent être calculées à partir de l'équation (12) comme suit :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2^A = u_2^{free} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^A & Y_{12}^A \\ Y_{21}^A & Y_{22}^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g_2^A \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_2^{free} = Y_{21}^A \\ f_2^{eq} = (Y_{22}^A)^{-1} u_2^{free} \end{cases} \quad (22)$$

António M.R. Ribeiro et Nuno M.M. Maia, dans leur article "*On the generalisation of the transmissibility concept*", ont étudié le potentiel de la méthode de la vitesse libre pour caractériser les vibrations d'une source de manière indépendante, sans influence directe des interfaces. Cette approche permet de mieux isoler les caractéristiques dynamiques de la source, offrant ainsi une analyse plus précise dans certains contextes.

Cependant, les auteurs ont identifié plusieurs limitations. Ils ont souligné que, dans des environnements industriels complexes, obtenir des mesures précises de vitesses libres peut être particulièrement difficile en raison des interférences externes ou des dynamiques non linéaires. De plus, ils ont mis en avant le défi de transformer ces vitesses libres en forces d'interface pertinentes, ce qui nécessite des modèles mathématiques sophistiqués et bien adaptés.

### CB-TPA – In Situ :

Les forces équivalentes peuvent être déterminées directement sur le système réel, en utilisant une procédure d'inversion des matrices pour identifier les forces reflétant précisément les vibrations résultant de l'excitation. Cette méthode implique la définition de points indicateurs (dans les nœuds 4) sur la structure passive, facilitant l'identification des forces équivalentes.

En pratique, deux phases sont essentielles pour acquérir les forces équivalentes. La première étape consiste à mesurer les réponses vibratoires en conditions opérationnelles, en utilisant des capteurs d'accélération disposés sur la structure passive. La seconde phase implique l'obtention des FRFs en recourant, par exemple, à des mesures d'impact de marteau sur l'ensemble, comme mentionné dans la référence [24].

Ces deux étapes forme ce qu'on appelle l'approche de caractérisation in situ, qui est spécialement efficace pour la caractérisation au sein de l'assemblage d'origine, d'où son nom « in situ » [16],[19],[25]. Les forces équivalentes peuvent être dérivées en effectuant une inversion standard ou une pseudo-inversion de la matrice composée des FRFs :

$$f_2^{eq} = (Y_{42}^{AB})^{-1}u_4 \quad (23)$$

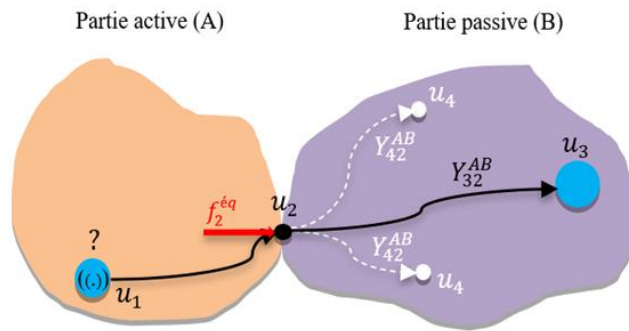


Figure 12. CB-TPA: In Situ

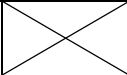
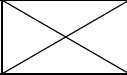
Ahmed El Mahmoudi, Francesco Trainotti et Daniel J. Rixen, dans leur article *"In-Situ Source Characterization for NVH Analysis of the Engine-Transmission Unit"*, ont approfondi la méthode In Situ en démontrant son efficacité pour mesurer directement les forces aux interfaces dans des conditions réelles de fonctionnement. Cette approche élimine la nécessité de démonter le système, ce qui la rend particulièrement pratique pour les analyses NVH dans des environnements industriels dynamiques et complexes.

Cependant, les auteurs ont également relevé plusieurs limitations importantes. Ils ont souligné que la précision des mesures dépend fortement de la qualité des capteurs utilisés et de leur positionnement optimal sur le système. De plus, les résultats obtenus sont étroitement liés à la dynamique globale du système, rendant la méthode sensible aux variations ou incertitudes dans les paramètres opérationnels. Ces travaux mettent en évidence le potentiel de la méthode In Situ pour des analyses pratiques tout en soulignant la nécessité d'améliorations pour renforcer sa robustesse et sa fiabilité dans des contextes industriels réels.

Cette méthode joue quand même un rôle essentiel dans l'analyse des chemins de transfert (TPA) en raison de sa capacité à fournir des résultats précis dans des environnements de test réels et à capturer des informations critiques sur les forces aux interfaces. Comme mentionné précédemment, elle permet de mesurer directement les forces et moments sans nécessiter de démontage du système, ce qui la rend très précieuse pour des analyses en conditions réelles et dynamiques. Cela permet d'identifier les contributions de chaque chemin de transfert de manière plus fidèle aux conditions opérationnelles.

Le tableau suivant présente un résumé et une classification des méthodes de TPA, en indiquant les paramètres spécifiques utilisés pour chaque méthode.

Tableau 2  
Résumé et classification des méthodes présentées dans le cadre de la TPA

Famille	Méthode	Mesure opérationnelle		Caractérisation de la source			Appliquer sur
		Paramètre	Système	Paramètre		En utilisant	FRFs
Classique	Direct Force	$g_2^B$	AB	Force d'interface	$g_2^B$		$Y_{32}^B$
	Mount Stiffness	$u_2^A, u_2^B$	AB	Force d'interface	$g_2^B$	$Z^{mt}$	$Y_{32}^B$
	Inverse Method	$u_4$	AB	Force d'interface	$g_2^B$	$Y_{42}^B$	$Y_{32}^B$
A base de composants	Blocked Force	$g_2^{bl}$	A (Bloqué)	Force équivalente	$f_2^{eq}$		$Y_{32}^{AB}$
	Free Velocity	$u_2^{free}$	A (Libre)	Force équivalente	$f_2^{eq}$	$Y_{22}^A$	$Y_{32}^{AB}$
	In Situ	$u_4$	AB	Force équivalente	$f_2^{eq}$	$Y_{42}^{AB}$	$Y_{32}^{AB}$

La combinaison des méthodes Mount Stiffness et In Situ permet de bénéficier des avantages de chacune pour aboutir à une approche hybride plus robuste. Les données de raideur fournies par la méthode Mount Stiffness sont associées aux mesures directes en conditions réelles obtenues par la méthode In Situ, afin d'améliorer la précision des estimations des forces d'interface et de stabiliser les résultats.

Ainsi, à partir de ces deux méthodes, une méthode hybride sera développée, qui sera détaillée dans le chapitre suivant (Chapitre 3).

## CHAPITRE 3

### ÉTUDE DES MÉTHODES NVH

Dans ce chapitre, l'étude des approches méthodologiques et des formules mathématiques utilisées pour caractériser les comportements vibratoires et acoustiques des systèmes mécaniques complexes sera approfondie. La diversité des phénomènes étudiés, ainsi que les défis liés à la précision et à la stabilité des analyses, rendent une exploration détaillée des outils et techniques disponibles essentielle.

Dans un premier temps, l'attention sera portée sur la méthode **In Situ**, avec une présentation de ses principes fondamentaux, de ses formules mathématiques, et des défis associés à son application. Les problématiques relatives au positionnement et au nombre des points indicateurs, influant directement sur la qualité des résultats, seront examinées. Les différentes approches pour l'inversion et le conditionnement des matrices, telles que le pseudo-inverse de Moore-Penrose, la décomposition en valeurs singulières (SVD) et l'inversion orthogonale, seront également détaillées, soulignant leur importance dans la stabilité des calculs.

Par la suite, la méthode de **raideur dynamique** sera étudiée, avec une analyse de ses formules théoriques et de son rôle dans la caractérisation des raideurs dynamiques des systèmes. Ses limites, notamment en termes d'applicabilité à des environnements complexes, seront également mises en évidence.

Enfin, la **méthode hybride** développée sera introduite. Cette approche combine les atouts des méthodes précédentes pour surmonter les limitations identifiées, offrant ainsi une solution plus robuste et précise pour l'analyse des forces et des raideurs dynamiques dans les systèmes mécaniques lourds.

Ce chapitre vise à fournir une compréhension globale et structurée des méthodes utilisées pour l'analyse NVH, tout en mettant en lumière les avancées apportées par la

méthode hybride, et à poser les bases nécessaires pour son application rigoureuse dans divers contextes industriels.

### **3.1 METHODES IN SITU ET OUTILS DE SIMPLIFICATION**

La méthode **In Situ** est une approche essentielle pour la caractérisation des phénomènes vibratoires et acoustiques dans les systèmes mécaniques complexes. Cette méthode se distingue par sa capacité à mesurer directement les paramètres dynamiques, tels que la raideur et l'amortissement, sans nécessiter le démontage des composants ou la création de conditions expérimentales artificielles. Elle offre ainsi une solution adaptée aux systèmes industriels lourds, où les interactions entre composants jouent un rôle crucial.

Cette section explore en détail les formules mathématiques sous-jacentes à la méthode In Situ, en mettant en évidence les principes fondamentaux qui guident son application. Les défis inhérents à cette méthode, notamment ceux liés à la collecte de données, au positionnement des points indicateurs et à l'inversion des matrices associées, seront également analysés. Une attention particulière sera portée aux outils mathématiques utilisés pour stabiliser et optimiser les calculs, comme le pseudo-inverse de Moore-Penrose, la décomposition en valeurs singulières (SVD) et les techniques de conditionnement des matrices.

#### **3.1.1 La méthode In Situ**

Comme introduit précédemment, la méthode In Situ se distingue par sa capacité à mesurer directement les forces équivalentes dans des conditions réelles, sans nécessiter de modifications ou de démontage du système étudié. Cette approche repose sur l'inversion de matrices, notamment celles associées aux fonctions de réponse en fréquence (FRFs), pour reconstruire les forces responsables des vibrations mesurées. En utilisant des points indicateurs stratégiquement positionnés, cette méthode permet d'identifier avec précision les forces aux interfaces et d'analyser leur contribution aux vibrations globales du système.

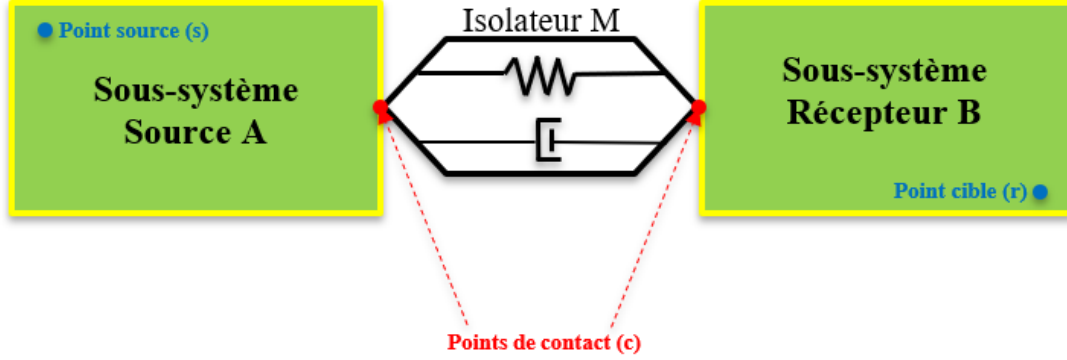


Figure 13. Système source-support-récepteur général.

#### Détails mathématiques et limitations

Pour analyser le transfert d'énergie vibratoire à travers l'isolateur, on utilise la raideur de transfert dynamique notée  $Z_{cr\ cs}^{mt}$  ou, inversement,  $Z_{cs\ cr}^{mt}$ . Il s'agit d'une quantité dépendant de la fréquence, qui relie une réponse mesurée d'un côté de l'isolateur  $u_1^A$  à la force bloquée résultante de l'autre côté  $f_2$  :

$$f_2 = Z_{cs\ cr}^{mt} u_1^A \quad (24)$$

D'après [26], une description complète de l'isolateur doit inclure les matrices de raideur dynamique  $Z_{cr\ cs}^{mt}$  et  $Z_{cs\ cr}^{mt}$ , de dimensions  $6 \times 6$  (3 DDL), qui définissent les relations entre les déplacements appliqués et les forces résultantes du même côté de l'isolateur. La matrice de raideur dynamique totale,  $K^{mt}$ , peut être représentée par la matrice  $12 \times 12$  suivante :

$$Z^{mt} = \begin{bmatrix} Z_{cs\ cs}^{mt} & Z_{cs\ cr}^{mt} \\ Z_{cr\ cs}^{mt} & Z_{cr\ cr}^{mt} \end{bmatrix} \quad (25)$$



L'impédance de transfert dynamique d'un isolateur, qui est une propriété intrinsèque de celui-ci et indépendante de la source et du récepteur, peut être obtenue à partir de l'inverse de la matrice d'admittance d'interface couplée [27][28] :

$$Z^{mt} = \begin{bmatrix} Z_{cs\ cs}^{mt} & Z_{cs\ cr}^{mt} \\ Z_{cr\ cs}^{mt} & Z_{cr\ cr}^{mt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{cs\ cs}^{mt} & Y_{cs\ cr}^{mt} \\ Y_{cr\ cs}^{mt} & Y_{cr\ cr}^{mt} \end{bmatrix}^{-1} \quad (26)$$

En substituant cette relation dans l'équation (24) on peut réécrire l'expression de la force équivalente sous la forme suivante :

$$f_2^{eq} = (Y_{42}^{AB})^{-1} u_4 \quad (27)$$

Où :

- $f_2^{eq}$  représente les forces équivalentes,
- $Y_{42}^{AB}$  est la matrice des FRFs entre les points d'excitation et les points indicateurs,
- $u_4$  correspond aux réponses vibratoires mesurées aux points indicateurs.

Cependant, l'inversion directe de la matrice  $Y_{42}^{AB}$  peut être problématique en raison des matrices mal conditionnées. Cela se produit fréquemment dans des systèmes mécaniques complexes où la dynamique globale influence fortement les mesures. Pour surmonter ces défis, des techniques comme la pseudo-inversion de Moore-Penrose ou sont utilisées pour améliorer la stabilité des calculs. Ces approches permettent d'atténuer l'amplification des erreurs dues aux incertitudes expérimentales ou aux bruits dans les mesures.

La méthode In Situ présente plusieurs avantages notables qui en font une approche privilégiée pour la caractérisation des systèmes dynamiques. Elle permet des mesures directement en conditions réelles, capturant fidèlement les interactions dynamiques au sein de l'environnement opérationnel, ce qui élimine les biais généralement introduits par les configurations expérimentales en laboratoire. Grâce à l'utilisation de capteurs optimisés et à un positionnement stratégique, cette méthode garantit une identification précise des forces

aux interfaces, renforçant ainsi la fiabilité des analyses. En outre, elle offre une grande efficacité industrielle en supprimant la nécessité de démonter les systèmes, ce qui se traduit par des économies significatives en termes de coûts et de temps lors des tests.

Cependant, malgré ses nombreux avantages, la méthode In Situ présente certaines limitations importantes. La qualité des mesures dépend fortement des capteurs utilisés, en particulier de leur sensibilité et de leur capacité à minimiser le bruit, ce qui peut affecter la précision des données collectées. De plus, les résultats obtenus sont influencés par les conditions opérationnelles du système, qui peuvent varier en fonction des changements dans les paramètres dynamiques, introduisant ainsi des incertitudes dans l'analyse. Enfin, l'inversion des matrices de FRFs, essentielle à cette méthode, peut être compromise par des matrices mal conditionnées, nécessitant une attention particulière pour éviter l'amplification des erreurs et garantir la stabilité des calculs.

## **Perspectives et intégration**

La méthode In Situ joue un rôle central dans les analyses NVH, en particulier pour l'identification des chemins de transfert (TPA). En fournissant des informations détaillées sur les forces et moments aux interfaces, elle permet une compréhension approfondie des contributions individuelles de chaque chemin de transfert. Ces informations sont essentielles pour optimiser la conception des systèmes mécaniques et améliorer leur comportement vibratoire en conditions réelles.

### **3.1.2 Pseudo inverse de Moore-Penrose**

La méthode d'identification In Situ de la raideur dynamique, ainsi que l'application de diverses techniques de l'Analyse des Chemins de Transfert (TPA), s'appuient largement sur le processus d'inversion d'une matrice de Fonctions de Réponse en Fréquence (FRF). Ce processus vise à résoudre des équations du type :

$$u = Yf \quad \text{Dont la solution est :} \quad f = (Y)^+ u \quad (28)$$

Cette équation est en réalité une forme matricielle d'un système d'équations linéaires que l'on cherche à résoudre. Pour assurer un bon conditionnement du système, c'est-à-dire pour que la solution soit peu influencée par de petites variations des données, on a tendance à surdéterminer le système. Cela signifie qu'on dispose de plus d'équations que d'inconnues. Parfois, le système peut être sous-déterminé dès le départ, notamment si tous les points de contact ou toutes les directions de mesure ne sont pas accessibles.

En général, un tel système d'équations ne possède pas de solution exacte, mais il est possible de rechercher une solution optimale  $f$  (selon le critère des moindres carrés) qui minimise  $\|Yf - u\|^2$ . Dans ce cas, il faut recourir à une approche différente de l'inversion matricielle classique, connue sous le nom de méthode inverse généralisée. Cette méthode produit, par définition, une solution au sens des moindres carrés [26]. Une manière de calculer la pseudo-inverse de Moore-Penrose d'une matrice consiste à utiliser une décomposition en valeurs singulières.

### 3.1.3 Décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières repose sur le principe qui considère que toute matrice rectangulaire  $Y$ , de dimensions  $m \times n$ , peut être décomposée en trois matrices distinctes : deux matrices orthonormales et une matrice diagonale [26][29]. On définit cette décomposition par l'équation suivante :

$$Y = USV^T \quad (29)$$

Avec :

- $U$  la matrice de dimension  $m \times m$ , composée des vecteurs propres gauches de  $Y$ .
- $V$  la matrice de dimension  $n \times n$ , composée des vecteurs propres droits de  $Y$ .
- $S$  la matrice de dimension  $m \times n$ , composée de l'ensemble des  $n$  valeurs singulières  $s_i$  ordonnées dans l'ordre décroissant.

Et la matrice  $S$  peut être définie comme suit :

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & s_1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

L'équation (29), après l'application de la décomposition de valeurs singulières devient :

$$Y^+ = VS^+U^H \quad (31)$$

Avec :

- $Y^+$  la pseudo inverse de  $Y$ .
- $U^H$  la transposée Hermitienne de  $U$ .
- $S^+$  la pseudo-inverse de  $S$  ; nulle partout sauf sur la diagonale :  $s_i^+ = \frac{1}{s_i}$ .

La difficulté principale de cette méthode d'inversion survient lorsque les données mesurées de la matrice  $Y$  sont fortement affectées par le bruit. Dans une telle situation, les plus petites valeurs singulières tendent à être extrêmement proches de zéro, plutôt qu'exactement nulles. Ce phénomène peut entraîner des complications significatives lors de l'inversion de la matrice. En effet, lors du calcul de l'inverse, des valeurs disproportionnément élevées peuvent apparaître du fait de la division par ces valeurs qui sont très proches de zéro, ce qui risque de compromettre la précision du résultat. Pour identifier et évaluer ce problème, on peut recourir au concept de conditionnement, qui est une mesure évaluant la sensibilité et la stabilité de la solution face aux variations des données d'entrée [26].

### 3.1.4 Conditionnement d'une matrice

Le conditionnement d'une matrice est un indicateur crucial pour évaluer la stabilité de l'inversion d'une matrice. En addition, le plus que le conditionnement est faible, le plus que l'inversion de la matrice est considérée comme stable. Une matrice avec un faible conditionnement est qualifiée de bien conditionnée, tandis qu'une matrice avec un conditionnement élevé est dite mal conditionnée. Dans les situations où le problème est mal conditionné, diverses techniques de régularisation peuvent être mises en œuvre pour renforcer la stabilité de la résolution du problème. Par conséquent, avant de procéder à l'inversion, il est essentiel de vérifier le conditionnement de la matrice concernée, comme indiqué dans les références [30],[31],[32].

$$Cond(Y) = \frac{\max(singularvalue(Y))}{\min(singularvalue(Y))} \quad (32)$$

Il est recommandé, lors du processus d'inversion, de négliger les plus petites valeurs singulières. Pour ce faire, on définit un seuil pour le nombre de condition et on écarte ainsi les valeurs singulières inférieures en fonction de ce seuil [33].

On peut résumer ce qui était étudié dans l'article [33] à travers le tableau suivant :

Tableau 3  
Critère de conditionnement

Conditionnement	Cond (Y) < 100	100 < Cond (Y) < 1000	1000 < Cond (Y)
Régularisation	Pas de régularisation	Régularisation recommandée	Régularisation nécessaire

Les principales méthodes de régularisation employées dans le domaine de l'identification inverse, souvent utilisées pour les méthodes **in situ**, ont été explorées en détail. Cette analyse a inclus une étude approfondie des avantages et des inconvénients associés à chacune de ces méthodes. Ces techniques de régularisation sont reconnues pour leur rôle essentiel dans la stabilisation du processus d'inversion, notamment lorsque les données disponibles sont imparfaites ou incomplètes.

### 3.2 METHODES DE LA RIGIDITE DYNAMIQUE DE SUPPORT – DYNAMIC MOUNT STIFFNESS

La méthode de la Rigidité Dynamique de Support (Dynamic Mount Stiffness) est une technique clé utilisée pour analyser les isolateurs non rigides, comme le support SSR représenté dans la figure 14. Ces isolateurs jouent un rôle essentiel dans l'atténuation des vibrations indésirables et l'amélioration des performances des systèmes mécaniques complexes. En ajustant précisément la raideur et l'amortissement des supports, cette approche permet d'optimiser l'absorption des vibrations et de réduire leurs effets néfastes sur les structures environnantes. Cette méthode met l'accent sur l'étude dynamique des isolateurs en tenant compte des interactions complexes entre la source, le support et le récepteur.

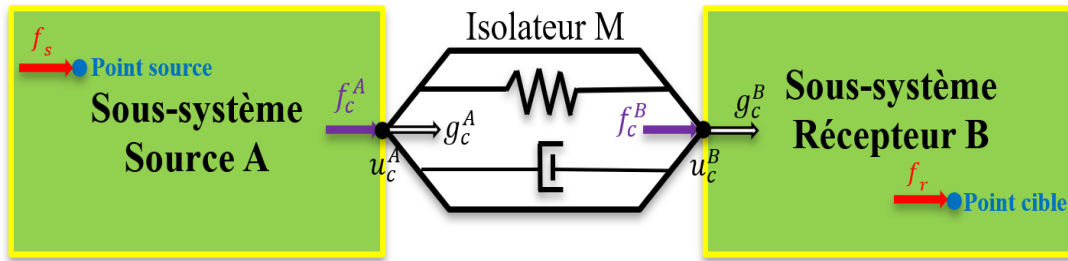


Figure 14. Système source-support-récepteur – Mount Stiffness

Les isolateurs peuvent être étudiés via des approches expérimentales ou numériques. Ici, nous nous concentrons sur les méthodes numériques, adaptées pour caractériser le comportement dynamique des isolateurs en termes de raideur et d'amortissement. Le comportement des degrés de liberté (DDL) de connexion de l'isolateur est décrit par l'équation suivante, en adoptant des notations conformes à celles de la méthode In Situ :

$$\begin{bmatrix} g_2^A \\ g_2^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{cs\ cs}^{mt} & Z_{cs\ cr}^{mt} \\ Z_{cr\ cs}^{mt} & Z_{cr\ cr}^{mt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^A \\ u_2^B \end{bmatrix} \quad (33)$$

Où :

- $Z_{cs\ cs}^{mt}, Z_{cr\ cs}^{mt}, Z_{cs\ cr}^{mt}, Z_{cr\ cr}^{mt}$  Sont les termes de la matrice d'impédance dynamique  $Z^{mt}$  du support ;
- $g_2^A$  et  $g_2^B$  sont les forces d'interface appliquées respectivement aux points de contact avec les sous-systèmes  $A$  et  $B$  ;
- $u_2^A$  et  $u_2^B$  sont les réponses vibratoires (déplacements, vitesses ou accélérations) mesurées aux points de contact entre l'isolateur et les sous-systèmes  $A$  et  $B$ .

La méthode repose sur les fonctions de réponse en fréquence (FRFs), représentées par la matrice  $Y$ . La relation entre les FRFs des systèmes couplés et non couplés, ainsi que la matrice d'impédance dynamique, est donnée par l'équation suivante :

$$Z^{mt} = Y_{couplé}^{-1} - Y_{non\ couplé}^{-1} \quad (34)$$

où :

- $Y_{couplé} = \begin{bmatrix} Y_{ss}^{AB} & Y_{sr}^{AB} \\ Y_{rs}^{AB} & Y_{rr}^{AB} \end{bmatrix}$  Est la matrice des FRFs du système couplé (source-support-récepteur) ;
- $Y_{non\ couplé} = \begin{bmatrix} Y_{ss}^{AB} & 0 \\ 0 & Y_{rr}^{AB} \end{bmatrix}$  Représente les FRFs des sous-systèmes non couplés (source et récepteur mesurés indépendamment).

En utilisant cette relation, les termes hors diagonale de  $Z^{mt}$  ( $Z_{cr\ cs}^{mt}$  et  $Z_{cs\ cr}^{mt}$ ) permettent de caractériser les propriétés dynamiques du support. Cependant, la méthode requiert des mesures détaillées des FRFs des sous-systèmes source et récepteur, ce qui complique son application dans des configurations **In Situ**, où ces sous-systèmes ne peuvent pas être isolés.

### Hypothèse de Masse Nulle

Pour simplifier l'analyse, on peut supposer que la masse du support est négligeable par rapport aux masses des sous-systèmes connectés. Cette hypothèse, bien qu'idéaliste, est souvent utilisée dans les études initiales. Sous cette hypothèse, les relations dynamiques deviennent :

$$g_2^A = -g_2^B, Z_{cs\ cs}^{mt} = -Z_{cs\ cr}^{mt} = -Z_{cr\ cs}^{mt} = Z_{cr\ cr}^{mt} \quad (35)$$

Cela implique que les termes hors diagonale de  $Z^{mt}$  suffisent à décrire la raideur dynamique du support. Cependant, cette hypothèse n'est pas toujours valide pour des systèmes industriels lourds, tels que les moteurs de navires, où la masse du support peut influencer significativement son comportement dynamique.

Dans ces cas, on utilise une relation plus générale, comme :

$$g_2^B = Z^{mt}(u_2^A - u_2^B) \quad (36)$$

Qui tient compte de l'effet des masses non négligeables et des interactions entre sous-systèmes. Ces équations soulignent l'importance de considérer la masse du support dans l'analyse dynamique.

La méthode de la rigidité dynamique présente certaines limitations qui doivent être prises en compte pour une application efficace dans des contextes industriels complexes. Tout d'abord, la détermination précise des fonctions de réponse en fréquence (FRFs), particulièrement pour les systèmes couplés, nécessite des équipements de mesure avancés et des configurations expérimentales souvent complexes. Ces exigences peuvent représenter un frein à son utilisation dans des environnements industriels standard.

De plus, les hypothèses simplificatrices, telles que l'hypothèse de masse nulle, bien qu'utiles pour simplifier les calculs, peuvent limiter l'applicabilité de la méthode à des systèmes industriels réels où les supports ont une masse significative influençant la dynamique globale. Cette restriction peut entraîner une perte de précision dans les analyses.



Un autre défi majeur réside dans la prise en compte des non-linéarités et des dépendances directionnelles. Les termes de la matrice d'impédance dynamique  $Z^{mt}$  peuvent être fortement influencés par des variations d'amplitude ou des comportements non linéaires, rendant l'analyse plus complexe et exigeant des approches adaptées pour une modélisation précise.

Enfin, l'utilisation de cette méthode dans des configurations In Situ reste limitée. Les formules actuelles ne tiennent pas toujours compte des paramètres directement mesurables en conditions opérationnelles. Cela complique l'application de la méthode dans des systèmes industriels où les mesures doivent être réalisées sans perturber l'environnement opérationnel du système.

Malgré ces limitations, des perspectives prometteuses émergent, notamment en combinant cette méthode avec d'autres approches, telles que la méthode In Situ. Une telle intégration pourrait permettre d'élargir son applicabilité tout en surmontant certaines de ces limitations, offrant ainsi une solution hybride adaptée aux environnements industriels réels.

### 3.3 METHODE HYBRIDE DEVELOPEE

Un des inconvénients majeurs des méthodes d'Analyse des Chemins de Transfert (TPA) dans le domaine NVH réside dans la nécessité de démonter entièrement le mécanisme pour étudier les réponses de chaque composant, ainsi que la raideur dynamique des supports installés entre les parties actives et passives. Cette démarche est souvent laborieuse et peut s'avérer complexe, car elle implique une analyse détaillée de chaque élément individuellement, en plus de la compréhension des interactions entre ces éléments.

Dans le cadre de la méthode hybride combinant les approches **In Situ** et **Dynamic Stiffness**, la relation générale entre la matrice de raideur dynamique  $Z^{mt}$ , les forces d'interface, et les déplacements relatifs est formulée sans hypothèses simplificatrices spécifiques telles que la réduction à un seul degré de liberté (1 DDL). Cette relation repose

sur l'intégration des formules mathématiques des deux méthodes pour caractériser la raideur des isolateurs vibratoires dans un système mécaniquement couplé.

### Relation Générale

Les forces d'interface ( $g_2^A, g_2^B$ ) appliquées aux points de contact des sous-systèmes A et B peuvent être décrites par la matrice de raideur dynamique  $Z^{mt}$  comme suit :

$$\begin{bmatrix} g_2^A \\ g_2^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{cs\ cs}^{mt} & Z_{cs\ cr}^{mt} \\ Z_{cr\ cs}^{mt} & Z_{cr\ cr}^{mt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^A \\ u_2^B \end{bmatrix} \quad (37)$$

Où :

- $Z^{mt}$  Est une matrice  $6 \times 6$  représentant les propriétés dynamiques (raideur, amortissement, inertie) entre les points de contact  $c_s$  (source) et  $c_r$  (récepteur) ;
- $g_2^A, g_2^B$  sont les forces appliquées par l'isolateur sur les sous-systèmes A et B respectivement ;
- $u_2^A, u_2^B$  sont les réponses (déplacements, vitesses, ou accélérations) aux points de contact.

Pour relier ces forces aux réponses mesurées dans le système couplé, on utilise les matrices des FRFs,  $Y_{couplé}$  et  $Y_{non\ couplé}$ . La matrice  $Z^{mt}$  est obtenue comme suit :

$$Z^{mt} = Y_{couplé}^{-1} - Y_{non\ couplé}^{-1} \quad (38)$$

Où :

- $Y_{couplé}$  Est la matrice des FRFs du système couplé (source-support-récepteur) ;
- $Y_{non\ couplé}$  Représente les FRFs des sous-systèmes non couplés ;

### Intégration des Forces d'Interface et des Forces Équivalentes

Dans la méthode In Situ, les forces équivalentes  $f_2^{\text{éq}}$  sont obtenues via l'inversion de la matrice des FRFs entre les points indicateurs et les points de contact :

$$f_2^{\text{éq}} = (Y_{42}^{AB})^+ u_4 \quad (23)$$

Où :

- $Y_{42}^{AB}$  est la matrice des FRFs reliant les points d'excitation (nœuds 4) et les points indicateurs ;
- $u_4$  correspond aux réponses vibratoires mesurées aux points indicateurs.

En combinant cette relation avec la méthode Dynamic Stiffness, les forces d'interface ( $g_2$ ) peuvent être directement liées aux forces équivalentes ( $f_2^{\text{éq}}$ ) comme suit :

$$g_2 = f_2^{\text{éq}} \quad (39)$$

Permettant ainsi de substituer les forces d'interface dans les équations de raideur dynamique. En remplaçant  $g_c$  dans l'équation (37), on obtient :

$$Z^{mt}(u_2^A - u_2^B) = (Y_{42}^{AB})^+ u_4 \quad (40)$$

### Relation Générale de la Méthode Hybride

En inversant cette relation, on peut écrire une expression explicite pour la matrice de raideur dynamique  $Z^{mt}$  :

$$Z^{mt} = (u_2^A - u_2^B)^{-1} (Y_{42}^{AB})^+ u_4 \quad (41)$$

Cette équation montre que la raideur dynamique peut être déduite directement à partir des déplacements relatifs ( $u_2^A - u_2^B$ ) et des forces équivalentes calculées via les points indicateurs.

## Ajout des Hypothèses Simplificatrices

### 1. Réduction à un seul degré de liberté (1 DDL) :

- Si le système est simplifié à 1 DDL, les termes matriciels se réduisent à des scalaires, et  $Z^{mt}$  devient un coefficient unique de raideur dynamique.
- La relation simplifiée devient :

$$Z^{mt} = \frac{(Y_{42}^{AB})^+ u_4}{u_2^A - u_2^B} \quad (42)$$

### 2. Forces d'interface comme forces équivalentes :

- En considérant  $g_2 = f_2^{eq}$ , les calculs deviennent encore plus directs, car les forces mesurées via les points indicateurs remplacent les forces appliquées.

La formule générale pour  $Z^{mt}$  permet de capturer les interactions dynamiques complexes dans un système multicouche sans imposer de contraintes excessives. En intégrant les hypothèses simplificatrices telles que la réduction à 1 DDL ou l'équivalence entre forces d'interface et forces équivalentes, la méthode hybride devient plus pratique et applicable à des environnements industriels complexes tout en maintenant une précision robuste.

Après avoir présenté les formules théoriques et les méthodologies associées à la caractérisation des isolateurs vibratoires, il est essentiel de valider ces approches à travers une étude numérique. Cette étape permettra d'évaluer l'applicabilité des méthodes développées dans des conditions contrôlées, en utilisant des simulations avancées pour reproduire fidèlement les comportements dynamiques d'un système mécanique.

L'analyse numérique permettra de générer les fonctions de réponse en fréquence (FRFs) et d'évaluer les forces équivalentes au niveau des interfaces. Ces résultats serviront de base pour valider les formules théoriques précédentes et démontrer l'efficacité des méthodologies développées dans des scénarios applicables aux systèmes industriels réels.

## **CHAPITRE 4**

### **ÉTUDE NUMÉRIQUE ET RÉSULTATS**

Ce chapitre présente les résultats issus des études numériques menées afin d'évaluer la pertinence et la robustesse de la méthode hybride proposée pour l'identification de la raideur dynamique des éléments de liaison dans un système complexe. L'approche développée combine deux méthodes complémentaires : une méthode basée sur l'analyse des chemins de transfert (TPA – Transfer Path Analysis), permettant de simuler les forces opérationnelles à partir de données vibratoires, et une méthode d'identification dynamique permettant de recalculer la raideur en fonction de la fréquence.

L'objectif est de démontrer, par simulation, que la combinaison de ces deux approches permet d'estimer avec précision les valeurs de raideur dynamique sans démonter le système, tout en assurant une bonne cohérence avec les données de référence. La première partie de ce chapitre est consacrée à la description du modèle simulé et à l'analyse des résultats obtenus à partir des deux codes développés. La seconde partie traite de l'interprétation approfondie de ces résultats, en mettant en lumière les forces, les limites et les perspectives d'amélioration de la méthode hybride proposée.

#### **4.1 ÉTUDE NUMERIQUE**

##### **4.1.1 Objectifs et stratégie numérique**

Cette étude numérique vise à valider l'efficacité de la méthode hybride proposée pour l'identification de la raideur dynamique des isolateurs dans un système complexe, sans démontage. Pour cela, une méthode TPA in-situ est couplée à une approche d'identification dynamique fondée sur les réponses mesurées. Les simulations ont été réalisées à l'aide du logiciel Simcenter 3D pour la génération des FRFs et des réponses opérationnelles, et du langage MATLAB pour l'analyse des données et la mise en œuvre des algorithmes d'identification.

Le modèle utilisé est un système académique simplifié, constitué de deux plaques reliées par quatre ressorts. Cette configuration permet un contrôle total des paramètres physiques et géométriques, tout en reproduisant des comportements dynamiques représentatifs des structures industrielles, comme les interfaces moteur-coque dans le domaine naval.

#### 4.1.2 Présentation du système académique

Ce système se compose de deux plaques en aluminium reliées par quatre ressorts. L'objectif de cette configuration est de fournir un environnement contrôlé pour étudier et valider l'efficacité de la méthode. En utilisant des plaques en aluminium, connues pour leur rigidité et leur légèreté, et en les connectant par des ressorts, le système peut simuler diverses interactions dynamiques et fréquentielles. Cette configuration permet une mesure et une analyse précises de la manière dont les vibrations et les forces sont transmises à travers les ressorts d'une plaque à l'autre. Un tel dispositif est essentiel pour comprendre le comportement des composants dans un modèle simplifié avant d'appliquer les résultats à des structures réelles plus complexes.

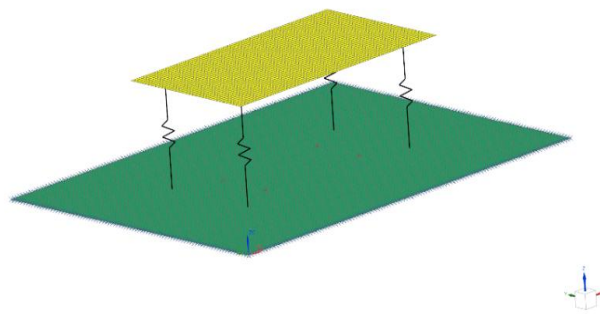


Figure 15. Système académique - Deux plaques en aluminium reliées par quatre ressorts (Simcenter 3D).

La plaque supérieure représente la partie active du système avec des conditions aux limites libres, ce qui signifie qu'elle n'est pas contrainte sur ses bords, lui permettant ainsi de

se déplacer plus librement. Cela imite le comportement d'un moteur de navire, qui est généralement monté de manière à permettre un certain mouvement. La plaque inférieure, quant à elle, a des bords fixés, faisant d'elle la partie passive du système. Cette plaque est solidement fixée en place, simulant la structure stable et immobile de la coque du navire. Pour reproduire avec précision les dynamiques d'un moteur de navire, la plaque supérieure est conçue pour être plus rigide que la plaque inférieure. Les propriétés matérielles et les dimensions de ces plaques sont détaillées dans le Tableau 2, fournissant une compréhension claire de leurs caractéristiques physiques respectives.

Tableau 4 : Propriétés physiques du système académique [34]

	Module de Young (Gpa)	Densité (Kg/m <sup>3</sup> )	Coefficient de poisson	DL F (%)	Longueur (m)	Largeur (m)	Épaisseur (m)	Mass e (Kg)
Plaque supérieure (Aluminium)	73.1	2700	0.3	2	0.7	0.4	0.005	3.78
Plaque inférieure (Acier)	210	7800	0.33	1	1.15	0.868	0.0256	200.59
Isolateurs	Ressort rigide; Raideur : $Kx = Ky = Kz = 5 \times 10^7 N/m$ La raideur est appliquée juste au niveau de l'axe Z							

Une charge ponctuelle est appliquée à la plaque supérieure dans la direction Z (Figure 16). Cette charge simule les forces verticales générées par le fonctionnement du moteur, lesquelles peuvent provoquer des vibrations et des contraintes au sein du système. L'application de cette charge est cruciale pour analyser comment les forces sont transmises à travers la structure et comment le système réagit dynamiquement.

Les simulations sont effectuées en utilisant la solution de réponse en fréquence modale (SOL 111), qui est bien adaptée pour analyser comment les systèmes répondent à des forces appliquées à des fréquences variées. Un pas de fréquence de 1 Hz est utilisé, couvrant une

large plage de fréquences allant de 0 à 4000 Hz. Cette plage garantit que l'analyse capture tous les comportements dynamiques pertinents, des vibrations de basse fréquence aux réponses de haute fréquence. Les résultats détaillés de ces simulations fournissent des informations précieuses sur les performances dynamiques et l'intégrité structurelle du système étudié.

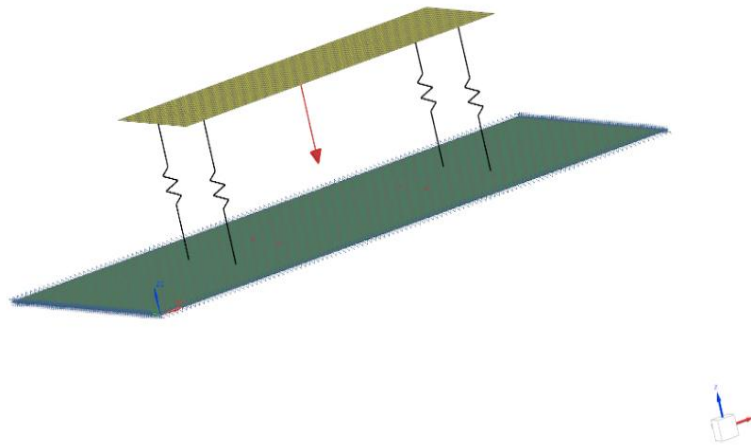


Figure 16. Charge ponctuelle appliquée sur la plaque supérieure selon la direction Z.

Deux séries de mesures ont été effectuées pour reconstituer les réponses aux points cibles  $u_3$ . Lors des tests opérationnels, les réponses ont été enregistrées aux points indicateurs  $u_4$  (48 points) ainsi qu'aux points cibles  $u_3$  (8 points) du système assemblé AB. Les réponses obtenues aux points  $u_4$  ont servi de référence pour évaluer la précision des réponses reconstruites aux points  $u_3$ , ce qui permet de modéliser les difficultés et les coûts liés à l'installation de capteurs, directement, sur les points récepteurs du système réel. En comparant ces mesures de référence avec les réponses reconstruites, il est possible de vérifier la fidélité et la justesse du processus de reconstruction, garantissant ainsi des mesures fiables pour des applications futures.



Par la suite, des mesures ont été prises pour déterminer les Fonctions de Réponse en Fréquence (FRFs) pour le sous-système passif B. Ces mesures ont été effectuées sans découpler le système, ce qui signifie que le sous-système B est resté intégré au système global pendant toute la durée des tests. De plus, l'excitation opérationnelle a été arrêtée afin d'éliminer toute influence extérieure et de garantir que les données recueillies reflètent uniquement la réponse propre du sous-système B.

#### 4.1.3 Application de la force d'excitation

Nous nous sommes concentrés sur la réponse translationnelle le long de l'axe Z, ce qui implique que nous avons mesuré comment le sous-système se déplace ou réagit aux forces appliquées dans cette direction. Plus spécifiquement, la force a été appliquée à l'interface au niveau des quatre points de contact (Figure 17) entre les ressorts et le sous-système passif uniquement selon l'axe Z (Figure 20). Cette approche a été choisie pour simplifier l'analyse et se concentrer sur la dynamique verticale du sous-système, qui est souvent cruciale pour de nombreux types d'analyses structurelles et vibratoires.

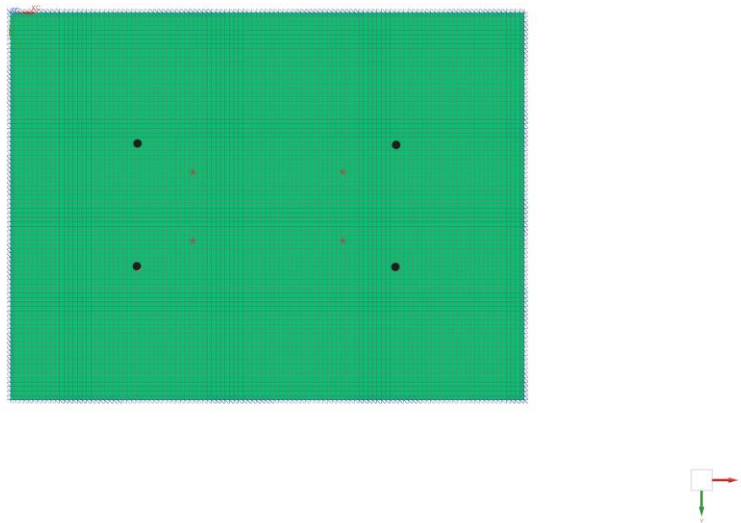
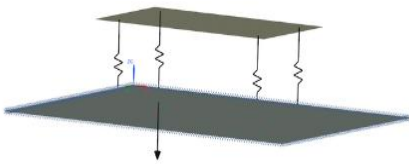


Figure 17. Points de contact (noir) entre le sous-système passif B et les 4 isolateurs.

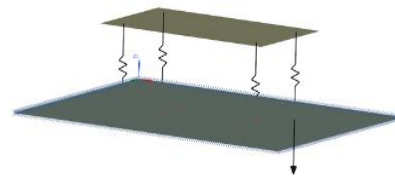
En appliquant la force uniquement selon l'axe Z, nous avons pu isoler et étudier les comportements spécifiques liés à ce type de sollicitation au niveau des quatre points de contacts entre les ressorts et le sous-système passive. Cela a permis de mieux comprendre la rigidité et les caractéristiques dynamiques du sous-système B le long de l'axe vertical. Les résultats obtenus ont fourni des informations précieuses sur la manière dont le sous-système

B absorbe et réagit aux forces verticales, ce qui est essentiel pour améliorer la modélisation et la prédiction du comportement du système global.

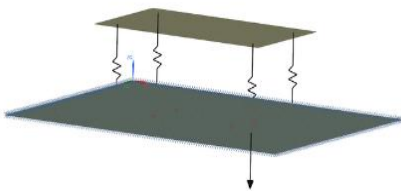
FRF 1



FRF 2



FRF 3



FRF 4

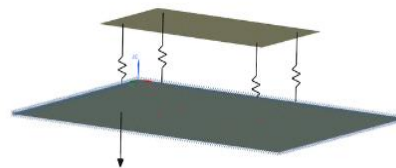


Figure 18. La force appliquée sur les quatre points de contact avec la plaque réceptrice.

#### 4.1.4 Extraction des RFRs

Pour extraire les Fonctions de Réponse en Fréquence (FRF) au niveau des quatre points de contact entre les ressorts et la plaque réceptrice dans la direction Z, nous procéderons en appliquant des forces de test précisément contrôlées le long de l'axe Z à chacun de ces points. Les réponses en déplacement seront mesurées simultanément à chaque point de contact à travers le logiciel SimCenter 3D et on injecte les données dans notre code MatLab par la suite. Ces mesures permettront de déterminer les FRF spécifiques à chaque point de contact, capturant ainsi la dynamique verticale entre les ressorts et la plaque réceptrice. Une fois les FRF obtenues, nous pourrons facilement calculer les admittances correspondantes. La matrice des admittances  $Y_{42}^{AB}$  sera cruciale pour reconstituer le spectre des forces à l'interface en utilisant les relations inverses des FRF à l'aide de l'équation (23). D'où on peut déduire, en injectant le pseudo inverse de Moore-Penrose (2.1.1), l'équation suivante :

$$f_2^{\acute{e}q} = [Y_{42}^{AB}]^+ u_4 \quad (43)$$

En plus, la matrice des admittances  $Y_{32}^{AB}$  nous aideront à prédire avec précision les réponses aux points cibles en tenant compte des interactions dynamiques complexes dans l'ensemble du système à l'aide de l'équation (15) qui nous permet d'écrire :

$$u_{3reconstruites} = Y_{32}^{AB} f_2^{\acute{e}q} \quad (44)$$

La matrice  $Y_{42}^{AB}$  est composée de 9 sous matrices selon les trois DDL et les trois axes, une matrice de dimension 3x3 peut être déduit :

$$Y_{42}^{AB} = \begin{bmatrix} [H_X, X] & [H_X, Y] & [H_X, Z] \\ [H_Y, X] & [H_Y, Y] & [H_Y, Z] \\ [H_Z, X] & [H_Z, Y] & [H_Z, Z] \end{bmatrix} \quad (45)$$

Les éléments de la matrice  $Y_{42}^{AB}$  ;  $[H_i, j]$  où  $(i, j) \in [(x, y, z) \quad (X, Y, Z)]$  sont des vecteurs complexes de taille 4000x48x3.

Avec :

- 4000 : le nombre de fréquences
- 48 : le nombre des points indicateurs
- 3 : le nombre de DDL

Dans notre étude, nous avons appliqué une force d'excitation le long de l'axe Z et nous nous concentrerons uniquement sur les réponses dans cette même direction. Par conséquent, le système sera analysé comme un modèle à un degré de liberté (1DDL).

Nous commencerons par simplifier la matrice  $Y_{42}^{AB}$  en éliminant les termes associés aux axes X et Y, ne conservant ainsi que les termes purement associés à l'axe Z. Nous obtenons alors :

$$Y_{42}^{AB} = [[H_Z, Z]] = [H_Z, Z] \quad (46)$$

Donc les éléments de la matrice  $Y_{42}^{AB}$  ;  $[H_i, j]$  où  $(i, j) \in [z, Z]$  sont des vecteurs complexes de taille 4000x48x1 (4000 lignes et 48 colonnes), d'où :

$$Y_{42}^{AB} = [H_Z, Z] = \left[ \begin{array}{ccc} Y_{1,1} & \cdots & Y_{1,48} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{4000,1} & \cdots & Y_{4000,48} \end{array} \right] \quad (47)$$

#### 4.1.5 Simplification de la matrice d'admittances

La décomposition en valeurs singulières (SVD) sera effectuée sur la matrice  $[H_Z, Z]$ . Pour garantir un conditionnement optimal des matrices, nous avons fixé la valeur seuil de la SVD à moins de 100 (paragraphe 3.1.3). Cette étape est cruciale pour assurer la stabilité et la précision des calculs ultérieurs.

Donc la matrice  $Y_{42}^{AB}$  peut-être écrite sous la forme suivante :

$$Y_{42}^{AB} = U\Sigma V^T \quad (48)$$

Où :

- $U \in \mathbb{C}^{4000 \times 4000}$  : matrice orthogonale.

$$U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,4000} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \cdots & u_{2,4000} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{4000,1} & u_{4000,2} & \cdots & u_{4000,4000} \end{bmatrix}$$

- $\Sigma \in \mathbb{R}^{4000 \times 48}$  : une matrice diagonale, avec des valeurs singulières sur la diagonale.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{48} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- $V^T \in \mathbb{C}^{48 \times 48}$  : transposée d'une matrice orthogonale  $V$ .

$$V = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,48} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,48} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{48,1} & v_{48,2} & \cdots & v_{48,48} \end{bmatrix} \Rightarrow V^T = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{48,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{48,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,48} & v_{2,48} & \cdots & v_{48,48} \end{bmatrix}$$

Pour simplifier le calcul complexe dû à la taille considérable de chaque matrice, nous utiliserons le logiciel MATLAB pour effectuer les calculs nécessaires.

Une fois la SVD appliquée, nous avons calculé la pseudo-inverse de la fonction de mobilité de transfert  $[Y_{42}^{AB}]^+$ . Cette pseudo-inverse permet de résoudre les équations

impliquant la matrice de transfert de manière plus stable, surtout lorsque la matrice originale est mal conditionnée ou singulière.

En appliquant la SVD sur la pseudo-inverse on obtient :

$$[Y_{42}^{AB}]^+ = V\Sigma^+U^T \quad (49)$$

Avec la pseudo-inverse en main, nous avons ensuite déterminé les forces équivalentes  $f_2^{eq}$  en utilisant l'équation (43). Cette étape est essentielle car elle permet de traduire les réponses mesurées en forces appliquées, offrant ainsi une compréhension détaillée de la dynamique du système étudié.

Enfin, la matrice  $Y_{32}^{AB}$  de dimensions 4000x8x1 est utilisée pour calculer les réponses aux points cibles. Conformément à l'équation (44), cette matrice est multipliée par les forces appliquées à l'interface.

Dans la section suivante, nous allons étudier la précision des réponses aux points cibles en fonction des distances des points indicateurs, en les classant en deux groupes : les points indicateurs proches et éloignés. De plus, nous appliquerons la méthode hybride mentionnée dans la section 3.3 afin de remonter à la raideur dynamique des isolateurs vibratoires aux interfaces.

## **4.2 RESULTATS ET ANALYSES**

### **4.2.1 Objectif de l'analyse**

L'objectif de cette section est d'analyser en profondeur les résultats issus des simulations numériques présentées dans le chapitre précédent. Il s'agit d'évaluer la précision des réponses reconstruites aux points cibles, la fidélité de l'identification des raideurs dynamiques en fonction de la fréquence, ainsi que les performances générales de la méthode hybride proposée. Cette dernière combine la reconstruction des forces opérationnelles par la méthode TPA in-situ et l'estimation dynamique des raideurs via une méthode inverse appliquée aux signaux vibratoires.

La stratégie suivie repose sur une démarche en deux temps. Dans un premier temps, les réponses vibratoires enregistrées aux points indicateurs sont utilisées pour reconstruire les forces appliquées à l'interface, via l'inversion pseudo-matricielle de la fonction de transfert. Dans un second temps, ces forces sont injectées dans une relation dynamique pour extraire les raideurs fréquentielles aux interfaces mécaniques. Les résultats sont confrontés à ceux issus d'une méthode directe pour évaluer la fidélité et la robustesse de l'approche.

Cette analyse approfondie permet de mettre en lumière les forces et les limites de la méthode dans un cadre numérique contrôlé. Elle jette également les bases de son éventuelle généralisation à des systèmes plus complexes ou à des essais expérimentaux réels.

#### 4.2.2 Simulation avec différents positionnements des points indicateurs [34]

Une étude paramétrique sera réalisée en fonction du positionnement des points indicateurs par rapport aux points de contact des isolateurs (en noir) et à la plaque réceptrice. La figure 24 met en évidence la distinction entre deux configurations : les points indicateurs bleus, situés à une certaine distance des interfaces, et les points jaunes, placés à proximité immédiate des zones de contact.

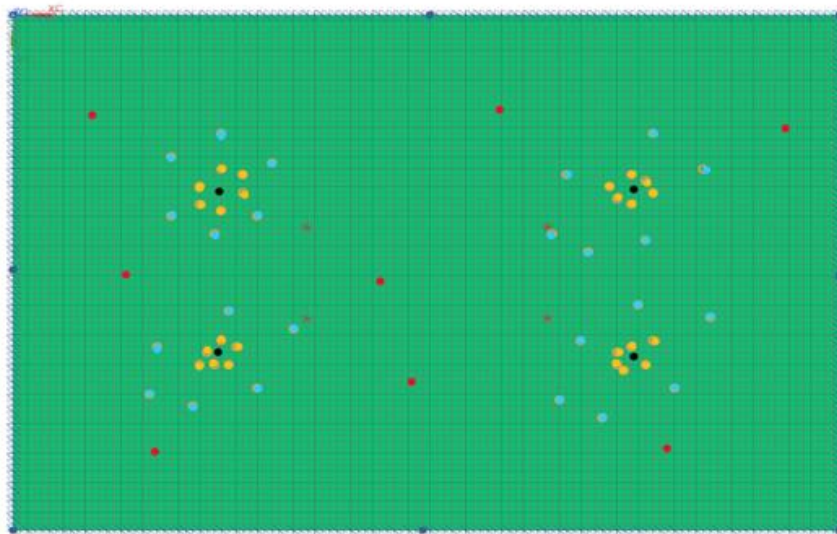


Figure 19. Plaque réceptrice – 48 points indicateurs (bleus et jaunes) et huit points cibles (rouges).

L'étude commencera par l'analyse des réponses aux points cibles, en utilisant les indicateurs identifiés par les points indicateurs de 1 à 24 (points jaunes) et 25 à 48 (points bleus), comme illustré respectivement dans les figures 20 et 21. Dans cette phase de l'analyse, deux points cibles seront considérés.



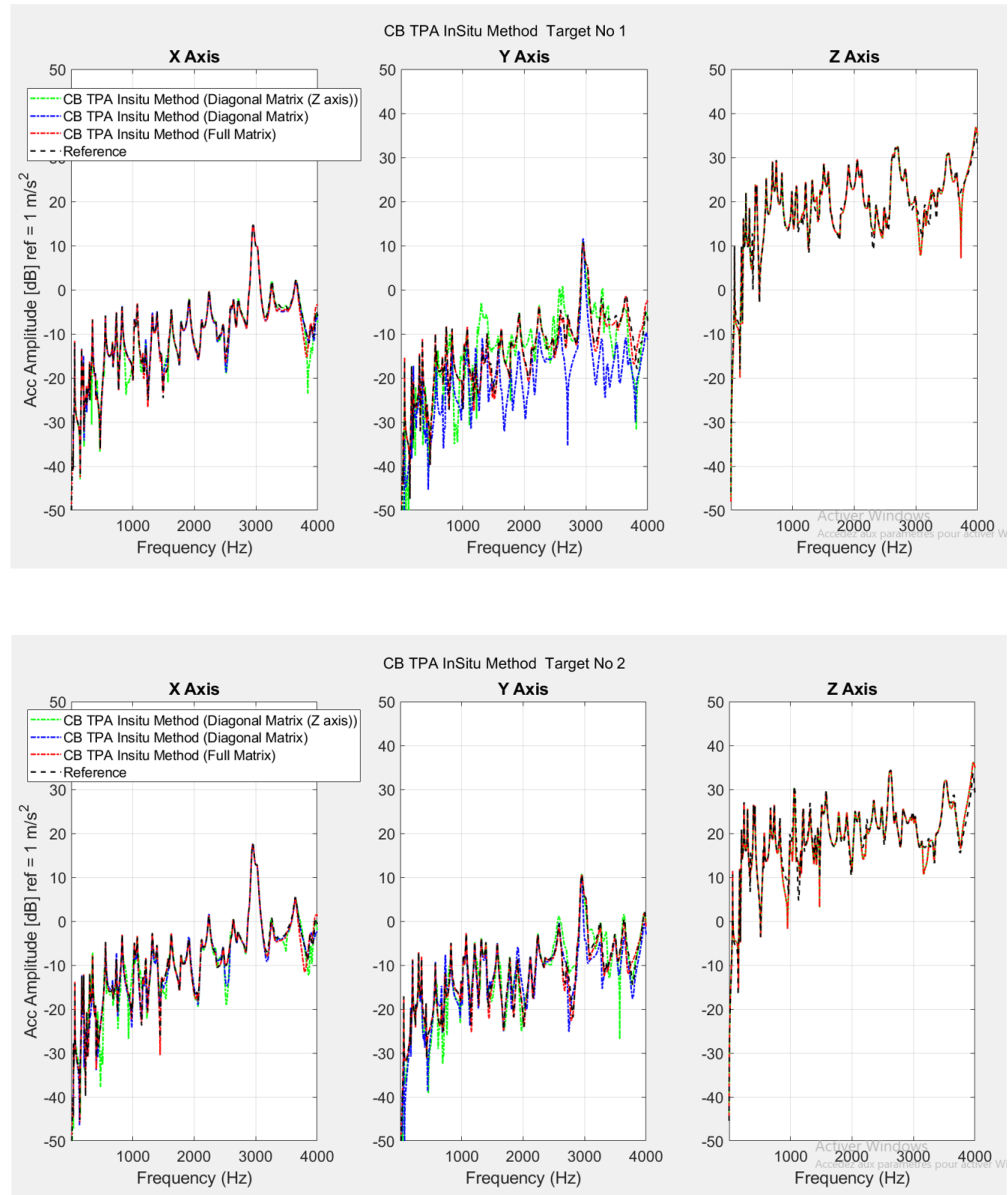


Figure 20. Accélérations aux cibles no 1 et no 2 à l'aide des points indicateurs proches.

La Figure 20 présente les accélérations reconstruites aux cibles 1 et 2 à l'aide des points indicateurs situés à proximité immédiate des interfaces mécaniques, c'est-à-dire dans la zone des ressorts. Trois types de reconstruction ont été comparés : l'utilisation d'une matrice diagonale restreinte à l'axe Z (ligne verte pointillée), une matrice diagonale complète prenant en compte les trois axes (ligne bleue pointillée), ainsi qu'une matrice complète non diagonale

intégrant tous les couplages dynamiques (ligne rouge pointillée). Ces résultats sont confrontés à la référence issue des simulations directes (ligne noire).

Dans cette configuration avec des points indicateurs proches, les résultats sont très satisfaisants sur l'ensemble du spectre fréquentiel. On observe une excellente concordance entre les courbes reconstruites et celles de référence, en particulier dans la plage de fréquence allant de 200 à 3000 Hz. Cette bande est précisément celle où les modes principaux du système sont activés, ce qui confirme que la méthode TPA est efficace lorsqu'elle est alimentée par des mesures locales bien positionnées. La matrice complète offre la meilleure précision : le recouvrement avec la courbe de référence est quasi parfait, signe que les contributions croisées entre axes sont correctement intégrées. Même la matrice diagonale étendue aux trois directions donne des résultats proches de la référence, bien que légèrement moins précis.

En basse fréquence, les erreurs demeurent contenues, ce qui est un résultat notable puisque cette région est souvent la plus délicate à reconstituer en TPA. Sur l'axe Z, qui correspond à la direction principale de l'effort appliqué, la correspondance est la plus nette, ce qui confirme le bien-fondé de l'hypothèse 1DDL dans cette configuration particulière. Globalement, l'utilisation de points indicateurs placés au plus près des zones d'interaction mécanique garantit une capture optimale des forces transmissibles.

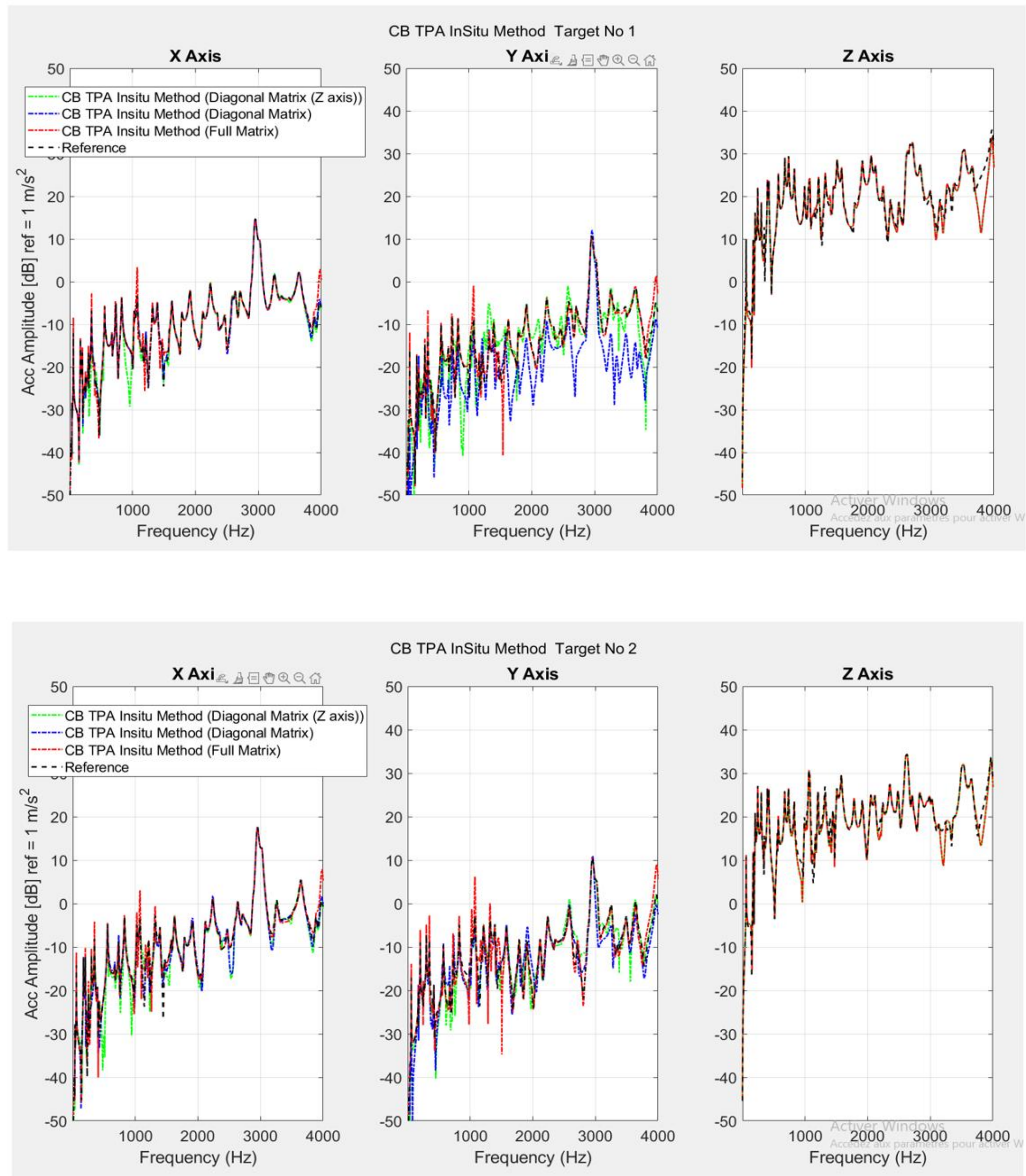


Figure 21. Accélérations aux cibles no 1 et no 2 à l'aide des points indicateurs éloignés.

La Figure 21 illustre les résultats obtenus lorsque les reconstructions sont effectuées à partir de points indicateurs éloignés des interfaces, répartis plus uniformément sur la plaque réceptrice. Comme dans le cas précédent, trois configurations de matrices ont été testées et comparées à la réponse de référence.

Dans ce scénario, on observe une nette dégradation de la qualité des reconstructions, notamment lorsque les matrices diagonales sont utilisées. Bien que la matrice complète continue à fournir de bons résultats globaux, certains écarts apparaissent, notamment au-delà de 3000 Hz. Ces divergences sont accentuées par l'augmentation de la complexité modale dans cette plage haute fréquence, qui exige une précision accrue dans la captation des signaux vibratoires.

Les courbes reconstruites sur l'axe Y sont particulièrement affectées par des variations irrégulières, symptôme d'un déficit d'information sur les couplages transversaux. L'éloignement spatial des points indicateurs par rapport aux interfaces rend difficile la restitution fidèle des composantes dynamiques complexes, surtout lorsque celles-ci dépendent fortement de l'amortissement local et des interactions multiaxes.

Par ailleurs, on note que les erreurs deviennent plus sensibles dans les zones de résonance, où de légers déphasages ou des imprécisions d'amplitude peuvent avoir des effets marqués sur la qualité des reconstructions. Cela souligne l'importance du couplage spatial entre les capteurs et les zones critiques de transfert d'énergie vibratoire.

#### **- Comparaison et conclusion**

L'ensemble des résultats met en évidence l'importance cruciale du positionnement des capteurs dans l'application de la méthode TPA. Lorsque les points indicateurs sont placés à proximité des interfaces mécaniques, les reconstructions sont non seulement plus fidèles sur le plan fréquentiel, mais également plus stables en amplitude. Cela est particulièrement vrai pour les composantes transversales (axes X et Y), où la restitution dépend étroitement de la capacité à capter les effets de couplage.

La configuration utilisant une matrice complète se démarque comme la plus robuste, offrant une reconstruction de qualité même lorsque les capteurs sont éloignés. Toutefois, elle implique un coût numérique plus élevé et nécessite un accès à une base de données de FRF plus fournie. À l'inverse, la configuration diagonale limitée à l'axe Z reste acceptable

uniquement dans des cas très spécifiques, où les efforts sont fortement uni axiaux et bien localisés.

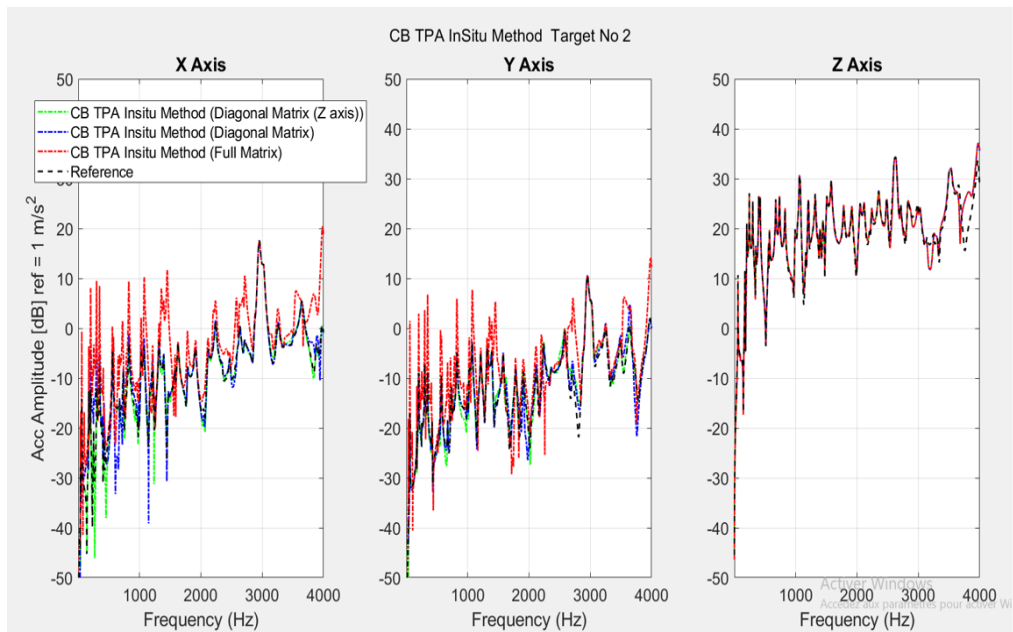
En résumé, ces observations confirment que le choix stratégique du positionnement des points de mesure est un facteur déterminant pour garantir la performance d'une approche TPA. Dans un contexte opérationnel réel, placer les capteurs au plus près des interfaces d'isolement, même en nombre réduit, peut améliorer significativement la fiabilité des reconstructions vibratoires tout en optimisant les ressources instrumentales.

#### **4.2.3 Simulation avec différents nombres de points indicateurs [34]**

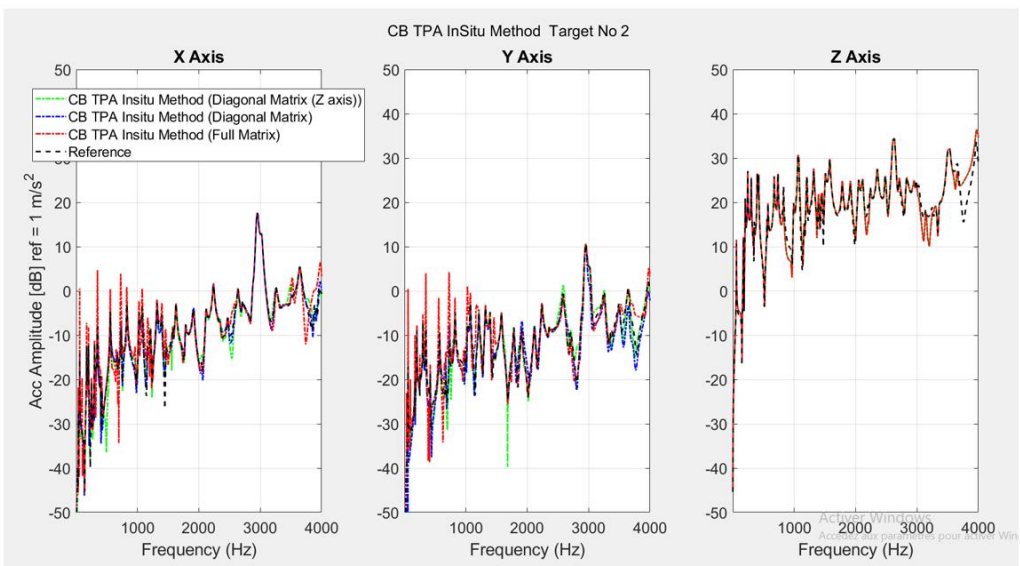
Après avoir étudié l'effet de la position spatiale des points indicateurs, cette section vise à analyser l'impact du nombre de points de mesure sur la précision de la reconstruction vibratoire dans la méthode TPA. En effet, bien que le positionnement stratégique des capteurs soit crucial, la densité de capteurs installés sur la structure joue également un rôle déterminant, tant pour la qualité des reconstructions que pour le coût opérationnel d'un essai in situ.

L'objectif ici est donc de déterminer combien de capteurs sont nécessaires pour obtenir une estimation satisfaisante des réponses aux points cibles, sans pour autant surcharger le système de mesure. Plusieurs sous-ensembles de capteurs, de tailles croissantes, seront sélectionnés parmi les 48 disponibles dans le modèle de référence. Pour chacun de ces cas, les reconstructions aux points cibles seront comparées à la référence afin d'identifier un seuil minimal de capteurs au-delà duquel les gains de précision deviennent marginaux.

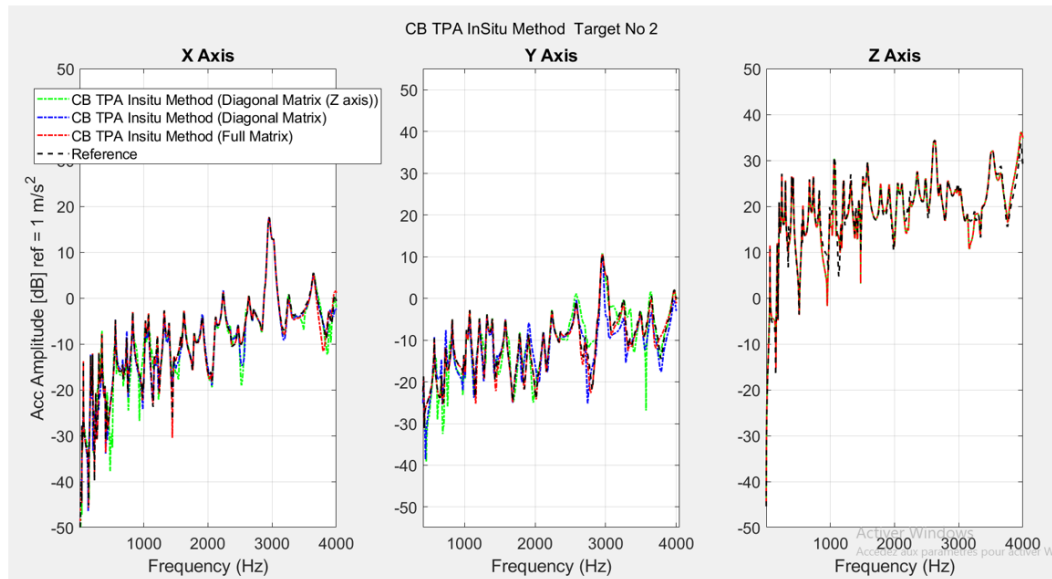
La Figure 22 présente l'évolution de la précision de la reconstruction des réponses aux points cibles en fonction du nombre de points indicateurs utilisés dans la méthode TPA. Quatre cas sont étudiés : 6, 12, 24 et 48 points répartis sur la plaque réceptrice. Tous les capteurs sont positionnés à proximité des interfaces mécaniques afin de neutraliser l'effet du positionnement et d'isoler l'impact du nombre de capteurs.



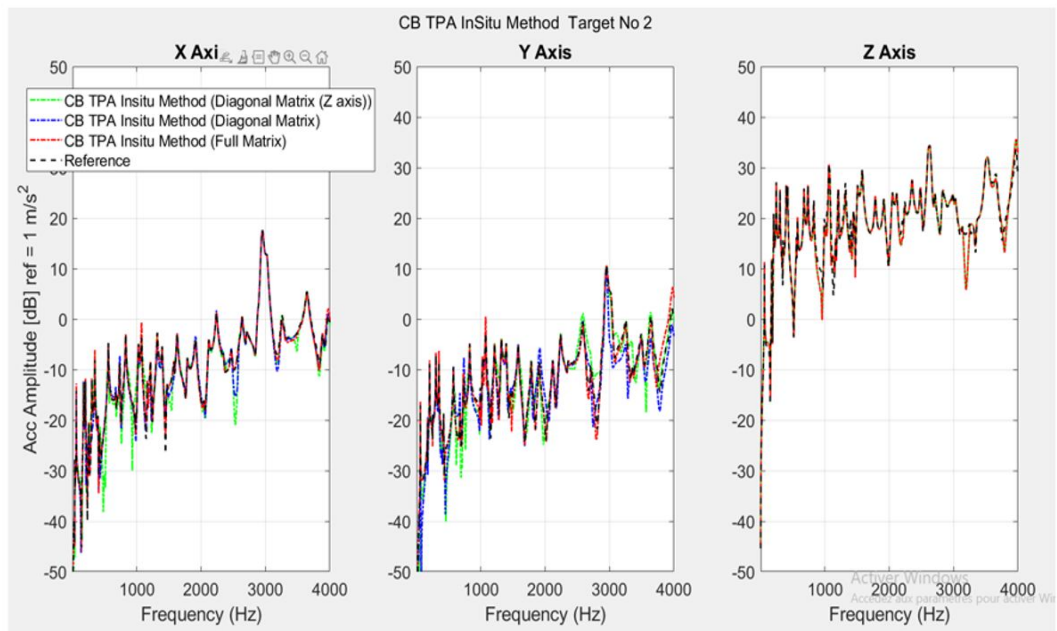
6 points indicateurs



12 points indicateurs



24 points indicateurs



48 points indicateurs

Figure 22. Méthode in situ – Effet du nombre de points indicateurs sur la précision de reconstruction.

Les courbes montrent que l'utilisation d'un nombre réduit de capteurs (6 ou 12) conduit à des erreurs significatives, en particulier dans les plages de fréquences élevées où la complexité modale est plus marquée. Ces configurations génèrent des reconstructions bruitées et instables, traduisant une sous-représentation des phénomènes vibratoires complexes et un conditionnement numérique moins favorable lors du calcul du pseudo-inverse de la matrice d'admittance.

Lorsque le nombre de capteurs est porté à 24, on observe une nette amélioration de la précision : les réponses reconstruites suivent beaucoup plus fidèlement la courbe de référence, notamment dans la bande [300 – 2500 Hz]. Ce nombre semble constituer un point de basculement à partir duquel les reconstructions deviennent qualitativement fiables, avec un écart moyen inférieur à 2 dB.

Enfin, l'utilisation de 48 points indicateurs permet d'atteindre un niveau de précision quasi optimal, avec une superposition quasi parfaite entre les courbes reconstruites et les courbes de référence. Cependant, les gains supplémentaires entre 24 et 48 points restent marginaux au regard de l'augmentation du coût de mesure et de traitement des données. Cette observation met en lumière un effet de saturation : au-delà d'un certain seuil, ajouter plus de capteurs n'apporte plus d'amélioration significative des résultats.

Ces résultats confirment l'importance de trouver un compromis optimal entre le nombre de capteurs et la précision visée. Dans des applications industrielles, une configuration avec environ 24 capteurs bien positionnés pourrait constituer une solution efficace, limitant la complexité du système tout en maintenant une qualité de reconstruction acceptable pour la plupart des analyses vibratoires.

#### **- Comparaison et conclusion**

L'analyse paramétrique menée dans cette section a mis en évidence l'impact direct du nombre de points indicateurs sur la précision des reconstructions vibratoires obtenues par la méthode TPA in situ. Les résultats montrent qu'un nombre insuffisant de capteurs (6 ou 12)



compromet la stabilité et la fidélité des réponses reconstruites, en particulier dans les plages fréquentielles où les phénomènes modaux sont complexes.

À partir de 24 capteurs, la qualité de la reconstruction devient nettement plus fiable, et les écarts par rapport aux données de référence se réduisent significativement. L'utilisation de 48 points indicateurs permet d'atteindre une précision quasi parfaite, mais les gains supplémentaires par rapport à la configuration à 24 capteurs demeurent marginaux. Ce constat suggère l'existence d'un seuil optimal, au-delà duquel l'ajout de capteurs n'apporte plus d'amélioration significative, tout en augmentant les contraintes instrumentales et computationnelles.

Ainsi, cette étude confirme la nécessité d'adopter une stratégie équilibrée, tenant compte à la fois du nombre de capteurs disponibles et des exigences de précision. Dans une optique d'optimisation industrielle, un compromis autour de 24 capteurs bien positionnés apparaît comme une solution réaliste et performante pour l'application de la méthode TPA in situ.

#### 4.2.4 Précision des réponses reconstruites

La première étape de validation concerne la capacité de la méthode hybride à reproduire fidèlement les réponses vibratoires aux points cibles à partir des données mesurées aux points indicateurs. Cette étape repose sur les équations (43) et (44).

$$f_2^{\acute{e}q} = [Y_{42}^{AB}]^+ u_4 \quad (43)$$

$$u_{3reconstruites} = Y_{32}^{AB} f_2^{\acute{e}q} \quad (44)$$

Avec :

- $u_4$  est le vecteur des réponses mesurées aux points indicateurs,
- $f_2^{\acute{e}q}$  est le vecteur des forces équivalentes reconstruites,

- $(.)^+$  Désigne le pseudo-inverse de Moore-Penrose,
- $Y_{42}^{AB}$  et  $Y_{32}^{AB}$  sont des matrices d'admittance entre les points indicateurs et l'interface, et entre l'interface et les points cibles respectivement.

Les résultats sont présentés sous forme de courbes d'amplitude normalisée en décibels selon la formule suivante :

$$Amplitude_{dB} = 10. \log_{10} \left( \frac{|u|}{1m/s^2} \right) \quad (50)$$

#### 4.2.5 Estimation de la raideur dynamique à travers la méthode hybride

Dans cette section, la méthode hybride décrite précédemment est appliquée pour estimer la raideur dynamique fréquentielle des isolateurs. Cette méthode repose sur deux étapes consécutives : la reconstruction des forces aux interfaces à partir des réponses vibratoires mesurées (TPA in-situ), suivie de l'estimation de la raideur dynamique par une formulation inverse utilisant la différence d'accélération entre les extrémités de chaque isolateur.

##### 4.2.5.1 Reconstruction des forces aux interfaces

La première étape consiste à reconstruire les forces opérationnelles appliquées à l'interface, à partir des réponses mesurées aux points indicateurs. La Figure 23 illustre l'évolution fréquentielle de ces forces reconstruite selon l'axe Z pour les quatre chemins de transfert, en comparant trois configurations : une matrice diagonale limitée à l'axe Z (à gauche), une matrice diagonale complète (au centre), et une matrice complète (à droite).

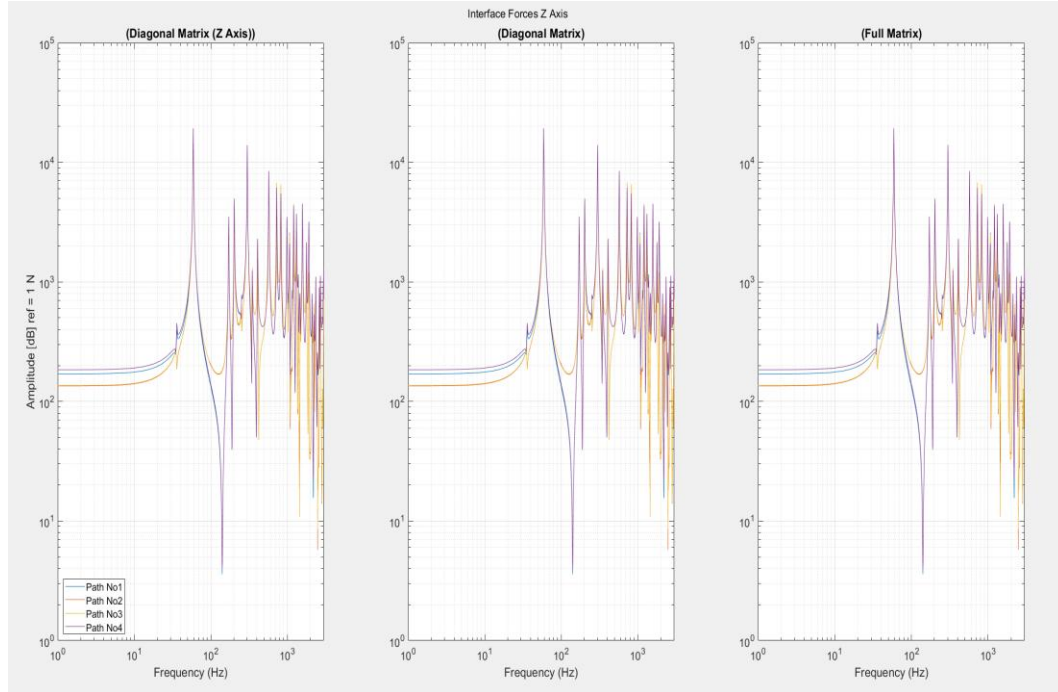


Figure 23. Forces reconstruites aux interfaces (axe Z) selon trois modèles de matrice.

On observe que dans les trois cas, les forces présentent des pics marqués aux fréquences de résonance, notamment autour de 90 Hz, confirmant la sensibilité modale de la structure. La matrice complète permet une meilleure stabilité des amplitudes sur l'ensemble du spectre, tandis que les configurations diagonales présentent davantage de fluctuations, notamment dans les hautes fréquences.

#### 4.2.5.2 Réponses reconstruites aux points cibles

La deuxième étape consiste à comparer les accélérations reconstruites aux points cibles avec les valeurs de référence simulées. La Figure 24 montre les réponses vibratoires obtenues pour la cible 1, selon les trois directions spatiales, pour les trois modèles de matrices utilisés dans la TPA.

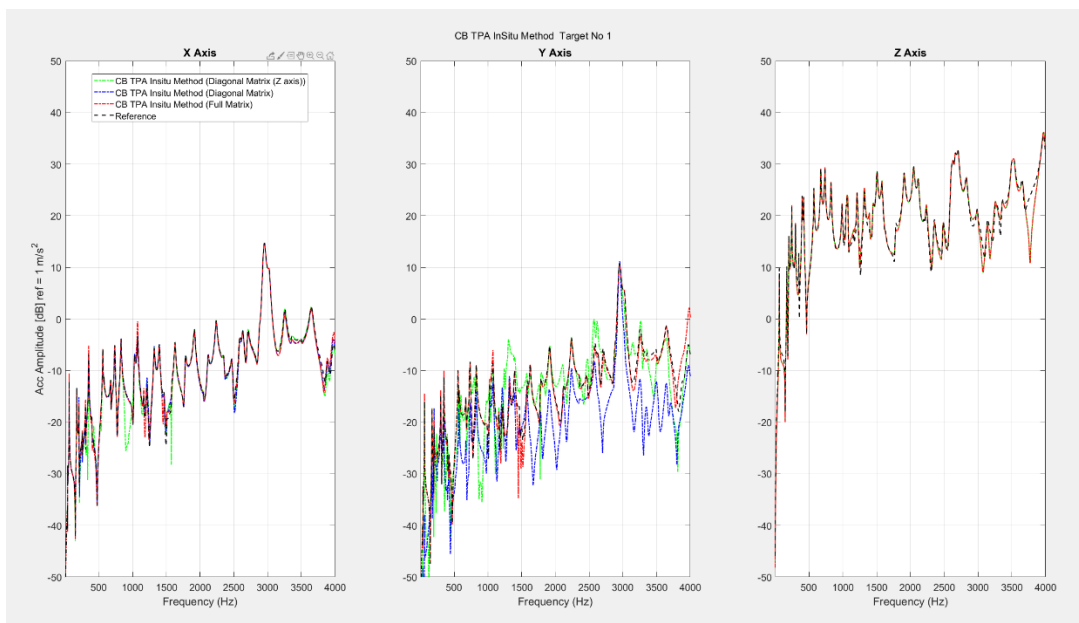


Figure 24. Réponses reconstruites à la cible 1 selon les trois axes.

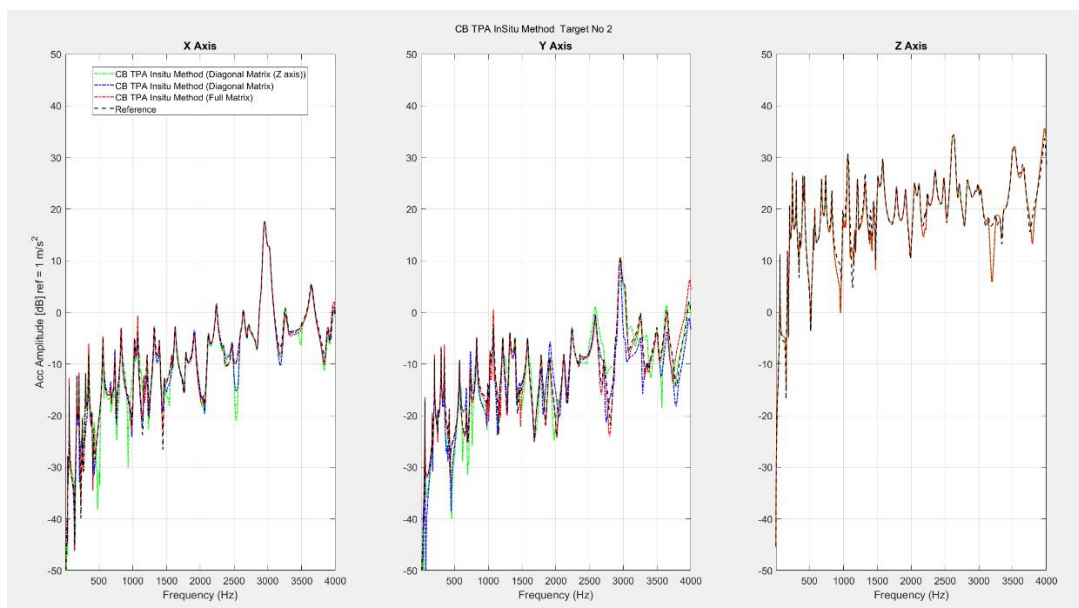


Figure 25. Réponses reconstruites à la cible 2 selon les trois axes.

Une très bonne concordance est obtenue sur la figure 24 avec la référence (ligne noire) pour les trois axes, en particulier avec la matrice complète. Cette dernière permet de reproduire fidèlement les amplitudes et les pics de résonance. Les écarts sont plus visibles

dans les axes X et Y lorsque seules les matrices diagonales sont utilisées, en raison des couplages négligés.

La Figure 25 présente les mêmes courbes, cette fois pour la cible 2.

La tendance observée est similaire sur la figure 25 : la matrice complète offre les résultats les plus proches de la référence, en particulier dans la bande utile [300 – 2500 Hz]. L'axe Z reste celui où la reconstruction est la plus précise, validant l'hypothèse 1DDL.

#### 4.2.5.3 Estimation de la raideur dynamique

Une fois les forces aux interfaces reconstruites, la raideur dynamique  $D(\omega)$  peut être estimée par l'équation suivante :

$$D(\omega) = \frac{f(\omega)}{-\omega^2 \Delta u(\omega)} \quad (51)$$

$$\text{Avec :} \quad \Delta u(\omega) = u_2(\omega) - u_3(\omega) \quad (52)$$

Où :

- $f(\omega)$  Est la force reconstruite pour chaque isolateur,
- $\Delta u(\omega)$  Est la différence d'accélération aux deux extrémités de l'isolateur.

Cette équation repose sur une hypothèse d'isolation de l'élément ressort. Les résultats sont présentés en échelle logarithmique sur les figures 26 et 27 pour l'axe Z uniquement.

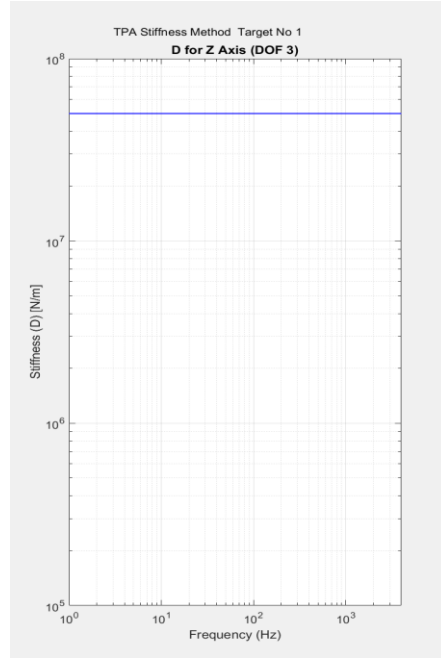


Figure 26. Raideur estimée pour la cible 1 selon l'axe Z

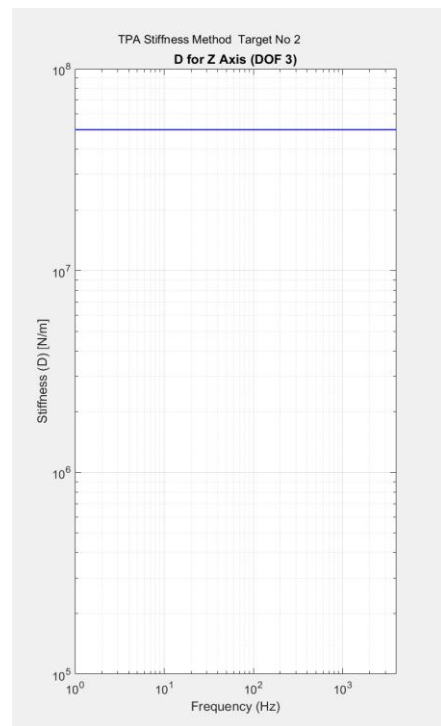


Figure 27. Raideur estimée pour la cible 2 selon l'axe Z

Ces deux figures représentent la raideur dynamique estimée  $D(\omega)$  selon la direction Z pour deux points cibles différents. Les résultats sont tracés en échelle logarithmique, avec une plage fréquentielle allant de 1 Hz à 4000 Hz.

Dans les deux figures, on observe que la raideur estimée reste constante et égale à la valeur nominale de référence fixée à  $D = 5 \times 10^7 N/m$ , sur l'ensemble du spectre fréquentiel. Cette stabilité indique que la méthode hybride permet ici une reconstruction très fiable de la dynamique verticale du système.

Contrairement à d'autres méthodes inverses qui présentent des oscillations à basse ou haute fréquence, les courbes obtenues ici sont strictement plates, ce qui reflète un excellent conditionnement numérique, probablement dû à une excitation strictement uniaxiale (Z), une configuration symétrique du système et une fidélité élevée des FRFs utilisées dans le calcul.

Le fait que seule la raideur en Z varie de manière significative et constante justifie l'hypothèse 1DDL retenue dans cette simulation. Cela confirme que les isolateurs se comportent principalement comme des ressorts verticaux, sans contribution notable dans les directions transversales (X et Y).

Les deux figures démontrent la capacité optimale de la méthode Hybride à identifier la raideur dynamique verticale dans un contexte numérique maîtrisé. Elles valident la précision de la reconstruction sur l'axe Z, confirment la pertinence du modèle 1DDL, et montrent que le système simulé se comporte de façon purement raide dans cette direction. Ces résultats forment une référence précieuse pour évaluer plus tard la robustesse de la méthode face à des données bruitées ou expérimentales.

#### 4.2.6 Forces et limites de la méthode hybride

La méthode hybride développée dans cette étude présente plusieurs atouts notables qui renforcent sa pertinence pour l'identification de la raideur dynamique dans des systèmes vibratoires complexes. Tout d'abord, elle est entièrement compatible avec des systèmes montés, ce qui signifie qu'elle ne nécessite pas de démontage des composants pour accéder aux interfaces mécaniques. Cette caractéristique rend son application particulièrement intéressante dans un contexte industriel ou embarqué, où les opérations de désassemblage sont souvent coûteuses, voire impossibles. De plus, la méthode s'adapte aisément à un environnement réel, puisqu'elle repose sur des mesures vibratoires opérationnelles, rendant ainsi possible un diagnostic in situ en conditions de fonctionnement.

Par ailleurs, elle offre une bonne précision sur une large bande fréquentielle, ce qui permet de caractériser la raideur dynamique non seulement autour des fréquences naturelles mais aussi dans des plages plus élevées, là où les effets modaux complexes peuvent être présents. L'approche se distingue également par sa complémentarité : elle assure à la fois une reconstruction précise des forces transmissibles et une estimation robuste des propriétés mécaniques (raideurs) des interfaces, en exploitant efficacement les fonctions de réponse en fréquence (FRF) mesurées.

Cependant, certaines limites doivent être soulignées. La méthode dépend fortement de la qualité des FRFs utilisées, qui doivent être mesurées avec précision et sous des conditions contrôlées. En outre, une instabilité est observée à basse fréquence, principalement due aux très faibles amplitudes de réponse qui affectent le dénominateur dans l'équation d'estimation de la raideur, amplifiant ainsi les erreurs numériques. La robustesse de la méthode reste également sensible au choix du seuil de conditionnement appliqué lors de la décomposition en valeurs singulières (SVD), paramètre qui doit être soigneusement calibré pour éviter les inversions instables. Enfin, la présente formulation repose sur une hypothèse simplificatrice : la raideur est supposée constante et uniquement appliquée selon l'axe Z, ce qui correspond à une modélisation à un seul degré de liberté (1DDL). Cette hypothèse, bien que valide dans



le cas étudié, pourrait limiter la généralisation de la méthode à des cas multiaxiaux plus complexes.

## **CHAPITRE 5**

### **CONCLUSION GÉNÉRALE**

Cette étude avait pour objectif d'évaluer la performance de la méthode TPA in-situ fondée sur les composants, en tant qu'outil de prédiction du comportement vibratoire d'un système complexe et de quantification du transfert d'énergie entre un sous-système actif et un sous-système passif via des isolateurs mécaniques. Une attention particulière a été portée à l'influence du nombre et du positionnement des points indicateurs sur la qualité des reconstructions. Les résultats ont montré qu'il est possible d'obtenir des estimations précises et stables à un coût mesuré, notamment grâce à l'utilisation de la décomposition en valeurs singulières (SVD) et à l'implantation d'au moins trois capteurs par chemin de transfert, répartis judicieusement autour des interfaces mécaniques. Afin de pallier les contraintes d'accessibilité propres à certains environnements industriels, il est recommandé de positionner les capteurs aussi près que possible des points de contact entre les sous-systèmes.

L'analyse a également révélé que les reconstructions basées sur une matrice diagonale restreinte à l'axe Z, c'est-à-dire ne tenant compte que des excitations selon la direction principale de sollicitation, offrent une très bonne corrélation avec les résultats de référence. Cette simplification, pertinente dans le contexte étudié, permet de réduire significativement le temps de mesure et les ressources nécessaires, tout en maintenant un niveau de précision satisfaisant pour les besoins opérationnels.

Sur cette base, une méthode hybride innovante a été développée en combinant les forces de la méthode TPA in-situ et celles de la méthode d'identification par raideur dynamique. La première repose sur la reconstruction des forces à partir des fonctions de réponse en fréquence mesurées, tandis que la seconde s'appuie sur une modélisation dynamique des isolateurs pour extraire leurs propriétés mécaniques. En intégrant ces deux approches, l'algorithme hybride permet non seulement de reconstruire les forces à l'interface, mais aussi d'estimer de manière cohérente la raideur fréquentielle des isolateurs vibratoires.

L'efficacité de cette approche a été validée par comparaison avec des valeurs de référence, montrant une excellente concordance dans la bande utile [300 – 2500 Hz].

Ce couplage méthodologique présente plusieurs avantages notables. Il permet de surmonter certaines limitations propres à chaque méthode prise isolément, telles que la sensibilité au mal-conditionnement des matrices dans le cas de la TPA, ou la dépendance à des paramètres difficilement mesurables dans la méthode des raideurs. L'application de la SVD permet ici de stabiliser les calculs, même en présence de matrices mal conditionnées, tandis que l'utilisation de capteurs judicieusement positionnés améliore la captation des modes vibratoires dominants. En plaçant les capteurs au plus près des zones d'interface, la méthode devient à la fois plus précise, plus robuste, et plus applicable à des configurations industrielles où l'accès aux structures internes est limité.

En outre, les résultats obtenus montrent que, dans certains cas, une simplification du modèle (notamment l'hypothèse d'excitation uniaxiale selon l'axe Z) ne nuit pas à la qualité des reconstructions, ce qui rend l'approche d'autant plus intéressante pour des applications pratiques nécessitant un compromis entre précision et efficacité opérationnelle. Ce constat ouvre la voie à une mise en œuvre rapide et ciblée de la méthode dans des contextes variés, tels que le diagnostic vibratoire de structures montées, l'identification non intrusive de composants mécaniques, ou encore la surveillance en conditions réelles.

En conclusion, la méthode hybride développée dans cette étude s'est révélée être un outil performant pour l'identification de la raideur dynamique des isolateurs vibratoires. Elle combine précision, efficacité de calcul et adaptabilité aux contraintes expérimentales, tout en offrant une validation cohérente par rapport aux données de référence. Néanmoins, des limites subsistent, notamment la complexité de traitement dans les basses fréquences, la dépendance à la qualité des FRFs, et l'exigence d'un bon conditionnement numérique. Les travaux futurs pourraient s'orienter vers l'application de cette approche à des structures multi-DDL, l'étude de cas fortement couplés ou non linéaires, et le développement de protocoles automatisés d'optimisation du placement des capteurs pour une meilleure représentativité modale.



## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] M.V. van der Seijs, D. de Klerk and D.J. Rixen,” General framework for transfer path analysis: history, theory, and classification of techniques”, *Mechanical Systems and Signal Processing* 68-69, pp. 217-244, (2016).
- [2] CALLISTER JR, William D. et RETHWISCH, David G. *Materials science and engineering: an introduction*. John Wiley & sons, 2020.
- [3] ASHBY, Michael F. et JONES, David RH. *Engineering materials 1: an introduction to properties, applications and design*. Elsevier, 2012.
- [4] ZHANG, Zhen, XIAO, Yi, SU, Zhongqing, *et al.* Continuous monitoring of tightening condition of single-lap bolted composite joints using intrinsic mode functions of acoustic emission signals: a proof-of-concept study. *Structural Health Monitoring*, 2019, vol. 18, no 4, p. 1219-1234.
- [5] TAMIN, Charif. *Développement de matériaux absorbants de type Kesterite pour application dans les cellules solaires*. 2021. Thèse de doctorat. Université Bourgogne Franche-Comté; Laboratoire de physico-chimie des matériaux, catalyse et environnement (LPCMCE), Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf (USTO MB).
- [6] C. V. Karsen, G. Gwaltney, et J. Blough, « Applying Transfer Path Analysis to Large Home Appliances », p. 6. January 2000.
- [7] H.Van der Auweraer, P. Mas, S. Dom, A. Vecchio, K. Janssens, et P. Van de Ponsele, « Transfer Path Analysis in the Critical Path of Vehicle Refinement: The Role of Fast, Hybrid and Operational Path Analysis », présenté à SAE 2007 Noise and Vibration Conference and Exhibition, 2007, p. 2007-01-2352.
- [8] LIU, Zhe, GAO, Yunkai, YANG, James, et al. Transfer path analysis and its application to diagnosis for low-frequency transient vibration in the automotive door slamming event. *Measurement*, 2021, vol. 183, p. 109896.
- [9] O. Guasch, C. García, J. Jové, et P. Artís, « Experimental validation of the direct transmissibility approach to classical transfer path analysis on a mechanical setup », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 37, no 1-2, p. 353-369, mai 2013.

- [10] ZHU, Ping, WANG, Zengwei, QIN, Zhiwei, et al. The transfer path analysis method on the use of artificial excitation: Numerical and experimental studies. *Applied Acoustics*, 2018, vol. 136, p. 102-112.
- [11] WANG, Zengwei et ZHU, Ping. A system response prediction approach based on global transmissibilities and its relation with transfer path analysis methods. *Applied Acoustics*, 2017, vol. 123, p. 29-46.
- [12] Gajdatsy, K. Janssens, L. Gielen, Critical assessment of Operational Path Analysis: mathematical problems of transmissibility estimation, *Acoustic*, Paris, 2008.
- [13] ELLIOTT, A. S., MOORHOUSE, A. T., HUNTLEY, T., et al. In-situ source path contribution analysis of structure borne road noise. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, vol. 332, no 24, p. 6276-6295.
- [14] Ramos, A. C. R, Álvarez-Briceño, Melo, C. A. P, L de Oliveira « A comparison between dynamic force estimation via classical path analysis and Kalman filtering techniques ». Conference: International Conference on Structural Engineering Dynamics At: Viena do Castelo, Portugal, July 2019.
- [15] MIR-HAIDARI, Seyed-Ehsan et BEHDINAN, Kamran. Aero-engine vibration propagation analysis using bond graph transfer path analysis and transmissibility theory. In: ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition. American Society of Mechanical Engineers, 2019. p. V011T01A015.
- [16] D. de Klerk et D. J. Rixen, « Component transfer path analysis method with compensation for test bench dynamics », *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 24, no 6, p. 1693-1710, août 2010.
- [17] M. van der Seijs, E. Pasma, D. de Klerk, D. Rixen « A robust Transfer Path Analysis method for steering gear vibrations on a test bench », p. 14. September 2014
- [18] M. V. van der Seijs, E. A. Pasma, D. de Klerk, et D. J. Rixen, « A Comparison of Two Component TPA Approaches for Steering Gear Noise Prediction », dans *Dynamics of Coupled Structures*, Volume 4, M. Allen, R. L. Mayes, et D. J. Rixen, Éd. Cham: Springer International Publishing, 2015, p. 71-79.
- [19] D. de Klerk, Dynamic response characterization of complex systems through operational identification and dynamic substructuring (Ph.D. thesis), Delft University of Technology, The Netherlands, 2009.
- [20] EL KHATIRI, Wafaa. Développement des méthodes d'ingénierie pour la spécification et la quantification du bruit structurel SBN dans les cabines des hélicoptères. 2023. Thèse de doctorat. Université Mohammed V de Rabat.

- [21] Haeussler, Michael & Klaassen, Steven & Rixen, Daniel. Comparison of substructuring techniques for experimental identification of rubber isolators dynamic properties, (2018).
- [22] D. D. van den Bosch, M. V. van der Seijs, D. de Klerk, "Validation of blocked-force Transfer Path Analysis with compensation for test bench dynamics", In: Dynamics of Coupled Structures, vol. 1, Proceedings of the 32nd IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics, Springer, New York, 2014, pp. 37–49 (Chapter 4).
- [23] M. V. van der Seijs, E. A. Pasma, D. de Klerk, D. J. Rixen, "A robust transfer path analysis method for steering gear vibrations on a test bench", In: Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA), Leuven, Belgium, 2014.
- [24] M.W.F. Wernsen, M.V. van der Seijs, D. de Klerk, An indicator sensor criterion for insitu characterisation of source vibrations, Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics, 5, Springer, 2017.
- [25] Moorhouse, A.T., Elliott, A.S., Evans, T.A.: In situ measurement of the blocked force of structure-borne sound sources. *J. Sound Vib.* 325(4–5),679–685 (2009).
- [26] SLIMANE, Rabii. Identification in situ de la raideur dynamique de transfert caractérisant l'interface d'isolation entre deux structures. 2021. Mémoire de maîtrise. Université de Sherbrooke.
- [27] Meggitt, Joshua. "On In-situ Methodologies for the Characterisation and Simulation of Vibro Acoustic Assemblies." 10.13140/RG.2.2.32585.80483, (2017).
- [28] J.W.R. Meggitt, A. S. Elliott, A. T. Moorhouse and Kevin H. Lai in-situ determination of dynamic stiffness for resilient elements, (2015).
- [29] ABDI, Hervé. Singular value decomposition (SVD) and generalized singular value decomposition. *Encyclopedia of measurement and statistics*, 2007, vol. 907, p. 912.
- [30] Hansen, P.C. Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, USA, 263 p, (1998).
- [31] ROOZEN, N. B., Leclere, Q., and Sandier, C. Operational transfer path analysis applied to a small gearbox test set-up. In d'Acoustique, S. F., editor, *Acoustics 2012*, Nantes, France, (2012).

- [32] BEN AMAR, Hamdi, CHERIF, Raef, et YADDADEN, Yacine. Interface Forces Identification Using Component TPA In-situ Method for Transfer Patch Analysis (TPA). *Canadian Acoustics*, 2022, vol. 50, no 3, p. 106-107.
- [33] Wei Cheng, Diane Blamond, Yapeng Chu, Lei Meng, Jingbai Lu, and Wajid Ali Basit. Transfer path analysis and contribution evaluation using svd-and pca-based operational transfer path analysis. *Shock and Vibration*, 2020, 2020.
- [34] Cherif, R., & Bakkali, H. (2025). Enhancing Transfer Path Analysis with In-situ Component TPA for Interface Forces Identification. Dans INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings. Institute of Noise Control Engineering.



